Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-08-22, SB

- Skrivtid: 14.00-18.00.
- Ansvarig: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036, e-post: larisa@chalmers.se.
- Vakt: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036
- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 25, räcker för godkänt, 18 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Bevisa att $\|x\|_\infty$ är en vektornorm.
  (2p)
- b) Skriv talet -5 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Antag att $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är en symmetrisk och ickesingulär matris. Visa att A^2 är positivt definit.
  (1p)
- d) Definiera fixpunktsiterationen:

  $$x_{k+1} = x_k + \cos(x_k - 1).$$

  Bestäm fixpunkterna och konvergens.
  (3p)

2.
Vi vill lösa följande system med hjälp av Newton's metod, där f är en reellvärd funktion av de reella variablerna x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} (f(x_1,x_2,x_3))^2 + \sin(f(x_1,x_2,x_3)) &= 1, \\ 5f(x_1,x_2,x_3) + x_1^2 + x_2 + x_3^2 &= 3(f(x_1,x_2,x_3))^3, \\ f(x_1,x_2,x_3) + \cos(f(x_1,x_2,x_3)) &= 10. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Formulera Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Vi vill interpolera (t_k, y_k), $k = 1, ..., n$ med $n-1$ styckvis kubiska polynom $p_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$ sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k). Hur många kontinuerliga derivator kan vi kräva av interpolanten? Vad är antalet obestämda koefficienter och hur många villkor (för att bestämma koefficienter) har vi ?
(**2p**)

4.

- Välj w_1, w_2, x_1, x_2 så att $w_1 = w_2$, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ?

$$\int_0^2 x^k dx = w_1 x_1^k + w_2 x_2^k, \quad k = 0, 1, ..., m.$$

  (**2p**)
- Använd trapetsmetoden för att beräkna integralen $\int_2^3 (x^2 + x)dx$.
  (**2p**)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} x''(t) = x(t) + 2y(t) - 3(x'(t))^2, \\ y''(t) = x(t) - y(t) - y'(t) + t, \\ x(-0.1) = 0, \\ x'(-0.1) = -1, \\ y(-0.1) = 2, \\ y'(-0.1) = -1. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp implicit Eulers eller bakåt-Eulers metod för problemet (**2p**)

$$\begin{cases} y'(t) = x(t), \\ x'(t) = y(t) + x(t), \\ y(0) = 0, \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx e^{\frac{p_1+p_2t^2}{1+p_3t}}$$

där p_1, p_2, p_3 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem.
(**3p**)