Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-01-04, SB

- Skrivtid: 14.00-18.00.
- Ansvarig: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036, e-post: larisa@chalmers.se.
- Vakt: Jimmy Johansson, tel. 772 53 25
- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 25, räcker för godkänt, 18 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Visa att $\| \cdot \|_p,\ p = 1$ är matrisnorm.
  (2p)
- b) Skriv talet 7.5 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är en symmetrisk och positivt definit matris, $m - 1$ är ett positivt heltal. Bevisa att A^m är symmetrisk och positivt definit matris.
  (1p)
- d) Låt a och b är reella tal med $a < b$. Definiera fixpunktsiterationen:

  $$x_{k+1} = x_k + (x_k - a)(x_k - b).$$

  Bestäm fixpunkterna och konvergens. Hint: bestäm ett villkor för a och b som garanterar konvergens mot åtminstone en av fixpunkterna (vi startar nära, men inte i fixpunkten).
  (3p)

---

2. Vi vill hitta ett lokalt minimum till den reellvärda funktion $f(x, y, z)$, x, y, z är reella variabler. Vi kan försöka hitta minimum där tre partiella derivatorna av funktionen $f(x, y, z)$ är noll.

Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system när $f(x, y, z) = x + y + z + \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. Försök inte att lösa systemet för hand.

(3p)

---

3. Finn interpolationspolynomet $p(t)$ av grad ett med basfunktioner $t^j, j = 0, 1$ som interpolerar punkterna $(1, 5), (2, 4)$.
(2p)

4.

- Vi har en kvadraturformel
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$
för lämpliga punkterna $x_1, ..., x_n$ och vikterna $w_1, ..., w_n$. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[-5, 3]$?
(2p)
- Använd trapetsmetoden i två punkter 0 och π för att beräkna integralen $\int_0^\pi \cos x \, dx$.
(2p)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:
$$\begin{cases} u''(t) = tu(t) + 3(v(t))^2 - 3u'(t), \\ v''(t) = u(t) - (v(t))^2 - v'(t) + t^2, \\ u(-1) = 0, \\ u'(-1) = -1, \\ v(-1) = 2, \\ v'(-1) = -1. \end{cases}$$
(2p)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet **(2p)**
$$\begin{cases} y'(t) = 5x(t) + 3y(t), \\ x'(t) = y(t), \\ y(-1) = 1, \\ x(-1) = 1. \end{cases}$$

---

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:
$$c = \sqrt{(t + p_1 p_2 t^2 + p_2)}$$
där p_1, p_2 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2 givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(3p)