Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-06-01

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Beräkna LU-faktoriseringen av matrisen nedan. När är matrisen singulär?
$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ c & b \end{bmatrix}$$
(1p)
- b) Skriv talet -2.5 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Visa att en positivt definit matris A är ickesingulär och att inversen är positivt definit.
(2p)
- d) Sätt upp Newton's metod för lösningen av ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$. Skriv fixpunktsiterationsmetod som svarar mot Newtons metod. Bestäm fixpunkterna och konvergens för fixpunktsiterationsmetod.
(3p)

---

2. Vi har givet tre ytor i det tredimensionella rummet och vi vill numeriskt ta reda på om det finns någon skärningspunkt mellan de tre ytorna.

Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system. De tre ytorna har ekvationer:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^4 - 3x^2y^2 + \cos(yz^3) &= 4, \\ x^2 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$
Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Vi vill interpolera $(t_k, y_k),\ k = 1, ..., n$ med $n - 1$ styckvis kvadratiska polynom $p_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k$ sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k). Hur många kontinuerliga derivator kan vi kräva av interpolanten? Vad är antalet obestämda koefficienter och hur många villkor har vi ?
(**2p**)

4.

- Vi har en kvadraturformel
$$\int_0^1 f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$
för lämpliga punkterna x_1, x_2 och vikterna w_1, w_2. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[-5, 3]$?
(**2p**)
- Bestäm den interpolerande splinefunktionen av grad ett som interpolerar i punkterna $(2, 2)$, $(3, 4)$ oh $(4, 8)$.
(**2p**)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:
$$\begin{cases} x''(t) = t + x(t) \cdot x'(t) \cdot y(t) + y'(t), \\ y''(t) = (1 + (x(t))^2) \cdot (y(t) - \frac{x(t)}{x'(t)+t}), \\ x(-1) = 1, \\ x'(-1) = 1, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = -0.1, \end{cases}$$
(**2p**)
- b) Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet
$$\begin{cases} y'(t) = x(t) + 2t, \\ x'(t) = y(t) - 2ty(t) + x(t) - t + 1, \\ y(0) = 0, \\ x(0) = -1. \end{cases}$$
(**2p**)

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:
$$c \approx 10^{\alpha} \exp^{\frac{\alpha}{\beta}t - \gamma t^2}$$
där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys MMG410, GU 2018-06-01

1.

- a) LU-faktoriseringen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ c & b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} u_{11}\ell_{11} & \ell_{11}u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \cdot u_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\ell_{11} = \ell_{22} = 1, \ell_{11}u_{11} = 2 \to u_{11} = 2; \ell_{11}u_{12} = a \to u_{12} = a; \ell_{21}u_{11} = c \to \ell_{21} = c/2;$$

$$\ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \cdot u_{22} = b \to u_{22} = (b - \ell_{21} \cdot u_{12})/\ell_{22} = b - \ell_{21} \cdot u_{12} = b - (ac)/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & b - (ac)/2 \end{bmatrix}$$

  A är singulär om $2b = ac$.

- b) Vi kan skriva talet -2.5 som $-2.5 = -[1 + 0.25] \cdot 2^1$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 1 så här: $1 + 1023 = 1024 = 2^{10}$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.25 = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4$. Vi får följande binär representation för -2.5:

$$|1|\underbrace{10000000000}_{exponenten}| \quad \underbrace{0100....0}_{mantissa\ 52\ bitar} \quad |$$

  där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000000 och mantissa 52 bitar kodas som 01000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$1100 \;\; 0000 \;\; 0000 \;\; 0100 \;\; .... \;\; 0000$$

  och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 1100 &= c, \\ 0000 &= 0, \\ 0000 &= 0, \\ 0100 &= 4, \\ 0000 &= 0, \\ &\cdots \end{aligned}$$

  Hexadecimalt (bas 16) format för -2.5 är:

$$c004000000000000.$$

- c) Om A är singulär existerar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ s.a. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Medför att $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, motsägelse!

  Vi kräver inte att A är symmetrisk utan vet bara att $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tag $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ (notera att $\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$). Vi får $0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (A^{-1}\mathbf{y})^T A(A^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y}$ som är en skalär så att vi kan skriva (eftersom (skalär)^T är det samma skalär) $(\mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y}$. Men $(\mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{y}$. Alltså är $0 < \mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{y}$.
- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.
  Newtons metod är:
  $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
  var k är iterationsindex, För $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ Newtons metod är:
  $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k - 2}{2x_k - 1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k - 1}.$$
  Fixpunktsiterationsmetod som svarar mot Newtons metod är:
  $$x_{k+1} = g(x_k)$$
  med $g(x_k) = \frac{x_k^2+2}{2x_k-1}$. Vi har: $g(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$.
  Fixpunkter:
  $$x^* = g(x^*),$$
  eller
  $$g(x^*) - x^* = 0.$$
  För $g(x^*) = \frac{(x^*)^2+2}{2x^*-1}$ ska vi lösa
  $$\frac{(x^*)^2 + 2}{2x^* - 1} - x^* = 0.$$
  Fixpunkter är:
  $$x_1^* = -1, x_2^* = 2.$$
  Konvergens:
  $$g'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x-1)^2},$$
  $$g'(x_{1,2}^*) = 0.$$
  Fixpunktsiterationsmetoden är konvergent eftersom $|g'(x_{1,2}^*)| = 0 < 1$. Båda fixpunkterna är attraktiva.

2. Vi inför vektorn $a = [x, y, z]^T$ och skriver $f(a)$ istället för $f(x, y, z)$. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} f_1 &:= x + y + z - 1 = 0, \\ f_2 &:= x^4 - 3x^2y^2 + \cos(yz^3) - 4 = 0, \\ f_3 &:= x^2 + y^3 + z^3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Newtons metod kan skrivas:

$$a_{k+1} = a_k - [J(a_k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_k + y_k + z_k - 1 \\ (x_k)^4 - 3(x_k)^2(y_k)^2 + \cos(y_k(z_k)^3) - 4 \\ (x_k)^2 + (y_k)^3 + (z_k)^3 - 3 \end{bmatrix},$$

där

$$J(a^k) = \begin{bmatrix} 1; & 1; & 1; \\ 4x_k^3 - 6x_k y_k^2; & -6x_k^2 y_k - z_k^3 \sin(y_k z_k^3); & -3y_k z_k^2 \sin(y_k z_k^3) \\ 2x_k; & 3y_k^2; & 3z_k^2 \end{bmatrix}.$$

3. Se detaljer i föreläsningsanteckningarna, sidor 209-212, och skannade anteckningar från föreläsning 16.

Vi kräver kontinuerligt första derivata $p_k'(t) \in C$.

Antalet obestämda koefficienter är $3(n-1)$. Interpolationskravet ger oss $2(n-1)$ villkor. Kontinuerligt första derivata $p_k'(t) \in C$ ger oss $n-2$ villkor (i inre punkter). Vi har:

$$\underbrace{3(n-1)}_{antalet\ koef.} \neq \underbrace{2(n-1)+n-2}_{antalet\ villkor} = 3n-4.$$

Vi saknar 1 villkoret: kan kräva $p_1'(t_1) = 0$ eller $p_k'(t_n) = 0$.

4.

- a) Om vi ska approximera integral

  $$\int_a^b f(t)dt,$$

  t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[0, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

  $$t = kx + m.$$

  För att bestämma koefficienter k, m ska vi lösa system:

  $$k \cdot 0 + m = a,$$
  $$k \cdot 1 + m = b,$$

  då

  $$m = a,\ k = b - m = b - a.$$

  Linjär avbilding är:

  $$t = (b-a) \cdot x + a,$$

  eller för $a = -1,\ b = 6$:

  $$t = 7 \cdot x - 1.$$

  I så fall integral $\int_{-1}^{6} f(t)dt$ kan beräknas som

  $$\int_{-1}^{6} f(t)dt \approx 7 \cdot \int_0^1 f(7 \cdot x - 1)\ dx$$
  $$\approx 7 \cdot [w_1 f(7 \cdot x_1 - 1) + w_2 f(7 \cdot x_2 - 1)].$$

- b) Den sökta funktionen är styckvis linjär och kan skrivas som

  $$p(t) = \begin{cases} 2t-2, & 2 \le t \le 3, \\ 4t-8, & 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

Hint: $p_1(t) = k_1 \cdot t + b_1,\ p_2(t) = k_2 t + b_2$. För att bestämma koefficienter k_1, b_1 ska vi lösa system:

$$k_1 \cdot 2 + b_1 = 2,$$
$$k_1 \cdot 3 + b_1 = 4,$$

då $k_1 = 2, b_1 = -2$.

För att bestämma koefficienter k_2, b_2 ska vi lösa system:

$$k_2 \cdot 3 + b_2 = 4,$$
$$k_2 \cdot 4 + b_2 = 8,$$

då $k_2 = 4, b_2 = -8$.

5.

- a) Sätt

$$u_1(t) = x(t),$$
$$u_2(t) = x'(t),$$
$$u_3(t) = y(t),$$
$$u_4(t) = y'(t).$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2, \\ u_2'(t) & = t + u_1 u_2 u_3 + u_4, \\ u_3'(t) & = u_4, \\ u_4'(t) & = (1 + u_1^2)(u_3 - \frac{u_1}{u_2 + t}), \\ u_1(-1) & = 1, \\ u_2(-1) & = 1, \\ u_3(-1) & = 0, \\ u_4(-1) & = -0.1. \end{cases}$$

- b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 237, . Explicit, eller Framåt-Eulers metod är: $v_{k+1} = v_k + hf(t_k, v_k)$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{h}$.
  Framåt-Eulers metod för vårt problem är:

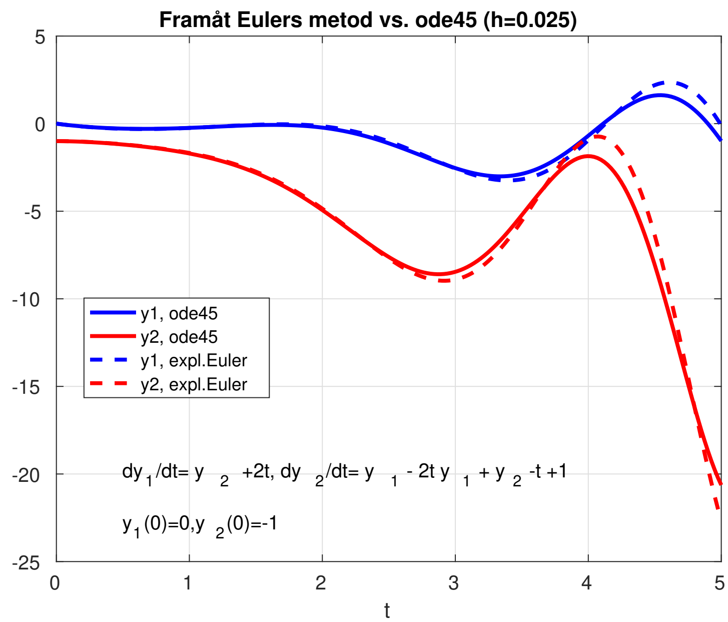
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = x_k + 2t_k;$$
$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = y_k - 2t_k y_k + x_k - t_k + 1.$$

eller

$$y_{k+1} = y_k + h(x_k + 2t_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + h(y_k - 2t_k y_k + x_k - t_k + 1).$$

Första iteration i den för $k = 0, t_0 = 0, y_0 = y(t_0) = y(0) = 0, x_0 = x(t_0) = -1$ ska vara:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + 2t_0) = 0 + h(-1 + 2 \cdot 0) = -h;$$
$$x_1 = x_0 + h(y_0 - 2t_0 y_0 + x_0 - t_0 + 1) = -1.$$



Extra material: Matlab's program för implementering av vårt problem. Programmet använder ode45 och framåt Eulers metod:

```
N=200;          % antalet diskr. punkter
y0 = [0 -1]';   % begynnelsevarden
t0 = 0;         % begynnelsetid
ts = 5;         % slut-tid

[t, y] = ode45(@funcsystem_ode45, linspace(t0, ts, N), y0);

figure(1);
plot(t, y(:, 1), 'b-', t, y(:, 2), 'r-','LineWidth',2)
xlabel('t')

title('  dy_1/dt= y_2  +2t, dy_2/dt= y_1 - 2t y_1 + y_2 -t +1,y_1(0)=0,y_2(0)=-1')
grid on
hold on

%  framåt Eulers metod

h=(ts-t0)/N;
  t = linspace(t0,ts,N);
  y1 = linspace(t0,ts,N);
 y2 = linspace(t0,ts,N);

y1(1)= 0;  % begynnelsevarden
y2(1)= -1;
```

```
for k = 1:N-1
   y1(k+1) = y1(k) + h*func1_sys(t(k),y1(k),y2(k));
       y2(k+1) = y2(k) + h*func2_sys(t(k),y1(k),y2(k));

end

plot(t, y1, 'b -- ', t,y2,'r--','LineWidth',2)
legend('y1, ode45', 'y2, ode45','y1, expl.Euler','y2, expl.Euler')

title('Framåt Eulers metod vs. ode45 (h=0.025)')
t = text(0.5,-20,'dy_1/dt= y_2+2t, dy_2/dt= y_1-2t y_1+y_2-t+1');
t = text(0.5,-23,'y_1(0)=0,y_2(0)=-1');
```

Matlab's funktion **funcsystem_ode45.m**:

```
function [dy] = funcsystem_ode45(t,y)
dy = zeros(2,1);    % a column vector
dy(1) = y(2) + 2*t;
dy(2) = y(1)  - 2*t*y(1) + y(2) -t+1;
```

Matlab's funktion **func1_sys.m**:

```
function [dy] = func1_sys(t,y1,y2)
dy=0
dy = y2 + 2*t;
```

Matlab's funktion **func2_sys.m**:

```
function [dy] = func2_sys(t,y1,y2)
dy=0
dy = y1 - 2*t*y1 + y2 - t + 1;
```

6. Logaritmera modellproblemet

$$c \approx 10^{\alpha} \exp^{\frac{\alpha}{\beta} t - \gamma t^2}$$

för att få:

$$\ln c \approx \underbrace{\alpha}_{x_1} \ln(10) + \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{x_2} t - \underbrace{\gamma}_{x_3} t^2.$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = \alpha, x_2 = \alpha/\beta, x_3 = \gamma$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[\ln(10), t_k,\ -t_k^2], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln(c_1) \\ \ln(c_2) \\ ... \\ \ln(c_m) \end{bmatrix}.$$

Sedan $\alpha = x_1, \beta = \alpha/x_2, \gamma = x_3$.