Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-08-22

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Bevisa att $\|x\|_\infty$ är en vektornorm.
  (2p)
- b) Skriv talet -5.0 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är en symmetrisk och ickesingulär matris. Visa att A^2 är positivt definit.
  (1p)
- d) Definiera fixpunktsiterationen:
  $$x_{k+1} = x_k + \cos(x_k - 1).$$
  Bestäm fixpunkterna och konvergens.
  (3p)

2.

Vi vill lösa följande system med hjälp av Newton's metod, där f är en reellvärd funktion av de reella variablerna x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned}(f(x_1,x_2,x_3))^2 + \sin(f(x_1,x_2,x_3)) &= 1,\\ 5f(x_1,x_2,x_3) + x_1^2 + x_2 + x_3^2 &= 3(f(x_1,x_2,x_3))^3,\\ f(x_1,x_2,x_3) + \cos(f(x_1,x_2,x_3)) &= 10.\end{aligned} \tag{0.1}$$

Formulera Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Vi vill interpolera (t_k, y_k), $k = 1, ..., n$ med $n-1$ styckvis kubiska polynom $p_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$ sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k). Hur många kontinuerliga derivator kan vi kräva av interpolanten? Vad är antalet obestämda koefficienter och hur många villkor har vi ?
(**2p**)

4.

- Välj w_1, w_2, x_1, x_2, så att $w_1 = w_2$, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ?
  $$\int_0^2 x^k dx = w_1 x_1^k + w_2 x_2^k, \quad k = 0, 1, ..., m.$$
  (2p)
- Använd trapetsmetoden för att beräkna integralen $\int_2^3 (x^2 + x)dx$.

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} x''(t) = x(t) + 2y(t) - 3(x'(t))^2, \\ y''(t) = x(t) - y(t) - y'(t) + t, \\ x(-0.1) = 0, \\ x'(-0.1) = -1, \\ y(-0.1) = 2, \\ y'(-0.1) = -1. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp implicit Eulers eller bakåt-Eulers metod för problemet (**2p**)

$$\begin{cases} y'(t) = x(t), \\ x'(t) = y(t) + x(t), \\ y(0) = 0, \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

---

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx e^{\frac{p_1 + p_2 t^2}{1 + p_3 t}}$$

där p_1, p_2, p_3 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-08-22

1.

- a)
  (1) $\|x\|_\infty := \max_k |x_k| > 0$
  (2) $\|\gamma x\|_\infty = \max_k |\gamma x_k| = \gamma \|x\|_\infty$
  (3) $\|x+y\|_\infty = \max_k |x_k + y_k| \le \max_k |x_k| + \max_k |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
- b) Vi kan skriva talet -5 som $-5 = -[1 + 0.25] \cdot 2^2$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 2 så här: $2 + 1023 = 1025 = 2^{10} + 2^0$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.25 = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4$. Vi får följande binär representation för -5:

$$|1|\underbrace{10000000001}_{exponenten}|\quad\underbrace{0100....0}_{mantissa\ 52\ bitar}\quad|$$

där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000001 och mantissa 52 bitar kodas som 01000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$1100 \quad 0000 \quad 0001 \quad 0100 \quad .... \quad 0000$$

och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 1100 &= c, \\ 0000 &= 0, \\ 0001 &= 1, \\ 0100 &= 4, \\ 0000 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Hexadecimalt (bas 16) format för -5 är:

$$c014000000000000.$$

Kolla i Matlab:

```
q = quantizer('double');
y = num2bin(q,-5)

y =

1100000000010100000000000000000000000000000000000000000000000000

 y = num2hex(q,-5)

y =

c014000000000000
```

- c) $A = A^T \to A^2 = A \cdot A = (AA)^T$.
  $x^T A^2 x = x^T A \cdot Ax = (Ax)^T \cdot Ax = \|Ax\|_2 \geq 0$. Kolla när $\|Ax\|_2 = 0$? $\|Ax\|_2 = 0$ om $Ax = 0$, men $Ax \neq 0$ eftersom det $A \neq 0$ (A är ickesingulär). Det betyder att A är positivt definit.
- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.
  Fixpunktsiterationsmetod är:
  $$x_{k+1} = g(x_k)$$
  med $g(x_k) = x_k + \cos(x_k - 1)$. Vi har: $g(x) = x + \cos(x - 1)$.
  Fixpunkter:
  $$x^* = g(x^*),$$
  eller
  $$g(x^*) - x^* = 0.$$
  För $g(x^*) = x^* + \cos(x^* - 1)$ ska vi lösa
  $$x^* + \cos(x^* - 1) - x^* = 0.$$
  eller
  $$\cos(x^* - 1) = 0.$$
  Lösning:
  $$x^* - 1 = \pi/2 + k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$
  Fixpunkterna:
  $$x^* = \pi/2 + k\pi + 1, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$
  Konvergens:
  $$g'(x) = 1 - \sin(x - 1).$$
  För fixpunkter $x^* = \pi/2 + k\pi + 1, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
  $$g'(x^*) = 1 - \sin(\pi/2 + k\pi) = 1 - \begin{cases} 1, \ \ k = 0, \pm 2, \pm 4, ... \\ (-1), \ \ k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, ... \end{cases}$$
  eller
  $$|g'(x^*)| = \begin{cases} 0 < 1, \ \ k = 0, \pm 2, \pm 4, ..., \textbf{metoden är convergent} \\ 2 > 1, \ \ k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, ... \ \textbf{metoden är divergent} \end{cases}$$

2.

Vi inför vektorn $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(x_1, x_2, x_3)$. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} f_1 &:= (f(x))^2 + \sin(f(x)) - 1, \\ f_2 &:= 5f(x) + x_1^2 + x_2 + x_3^2 - 3(f(x))^3, \\ f_3 &:= f(x) + \cos(f(x)) - 10. \end{aligned}$$

Newtons metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x^k)^2 + \sin(f(x^k)) - 1 \\ 5f(x^k) + (x_1^k)^2 + x_2^k + (x_3^k)^2 - 3(f(x^k))^3 \\ f(x^k) + \cos(f(x^k)) - 10 \end{bmatrix},$$

där

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} 2f(x_k)f'_{x_1}(x^k) + \cos f(x^k)\cdot f'_{x_1}(x^k); & 2f(x^k)f'_{x_2}(x^k) + \cos f(x^k)\cdot f'_{x_2}(x^k); & 2f(x^k)f'_{x_3}(x^k) + \cos f(x^k)\cdot f'_{x_3}(x^k) \\ 5f'_{x_1}(x^k) + 2x_1^k - 9(f(x^k))^2 f'_{x_1}(x^k); & 5f'_{x_2}(x^k) + 1 - 9(f(x^k))^2 f'_{x_2}(x^k); & 5f'_{x_3}(x^k) + 2x_3^k - 9(f(x^k))^2 f'_{x_3}(x^k) \\ f'_{x_1}(x^k) - \sin f(x^k)\cdot f'_{x_1}(x^k); & f'_{x_2}(x^k) - \sin f(x^k)\cdot f'_{x_2}(x^k); & f'_{x_3}(x^k) - \sin f(x^k)\cdot f'_{x_3}(x^k). \end{bmatrix}.$$

3.

Vi kräver $p'_k(t) \in C$ och $p''_k(t) \in C$.

Antalet obestämda koefficienter är $4(n-1)$. Interpolationskravet ger oss $2(n-1)$ villkor. Kontinuerligt första derivata $p'_k(t) \in C$ ger oss $n-2$ villkor (i inre punkter), och $p''_k(t) \in C$ ger oss $n-2$ villkor (i inre punkter). Vi har:

$$\underbrace{4(n-1)}_{antalet\ koef.} \neq \underbrace{2(n-1) + 2(n-2)}_{antalet\ villkor} = 4n-6$$

Vi saknar 2 villkor: kan kräva $p''_1(t_1) = 0$ och $p''_k(t_n) = 0$.

4.

- a) Formeln ska vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, 2, ..., m$ för maximalt m. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} k = 0 &: \int_0^2 x^0 dx = 2 = w_1 + w_2, \\ k = 1 &: \int_0^2 x^1 dx = 2 = w_1 x_1 + w_2 x_2, \\ k = 2 &: \int_0^2 x^2 dx = 8/3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, \\ k = 3 &: \int_0^2 x^3 dx = 4 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3. \end{aligned}$$

  System som ska lösas:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2, \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= 2, \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= 8/3, \\ w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 &= 4. \end{aligned}$$

  Om $w_1 = w_2$, då $w_1 = w_2 = 1$ eftersom $w_1 + w_2 = 2$. Från systemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 8/3, \end{aligned}$$

  kan vi hitta att $x_1 = 2 - x_2$ och $(2 - x_2)^2 + x_2^2 = 8/3 \to 2x_2^2 - 4x_2 + 4/3 = 0$. Lösningen är:

$$x_2 = 1 \pm 1/\sqrt{3}.$$

  Eftersom $x_1 < x_2 \to x_1 = 1 - 1/\sqrt{3}, x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}$. Kollar om $x_1 = 1 - 1/\sqrt{3}, x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}$ är lösningar för $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 4$. Använder binomialsatsen: $(1+c)^3 + (1-c)^3 = 2(1+3c^2)$ för $x_1^3 + x_2^3 = (1 - 1/\sqrt{3})^3 + (1 + 1/\sqrt{3})^3 = 2(1 + 3\cdot(1/\sqrt{3})^2) = 4$ vilket är lika med exakta värdet. Då $x_1 = 1 - 1/\sqrt{3}, x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}$ är lösningar för $w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = 4$. Stämmer det för $k = 4$? Inte. Så det polynomiella gradtalet är tre.

- b)
  Trapetsmetoden för $\int_2^3 f(x)dx$ är:
  $$\int_2^3 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(2) + f(3)) \cdot (3 - 2).$$
  I vårt fall har vi $f(x) = x^2 + x, f(2) = 6, f(3) = 12$, då trapetsmetoden för $\int_2^3 (x^2 + x)dx$ ger oss:
  $$\int_2^3 (x^2 + x)dx \approx \frac{1}{2}(6 + 12) = 9.$$

5.

- a) Sätt
  $$\begin{aligned} u_1(t) &= x(t), \\ u_2(t) &= x'(t), \\ u_3(t) &= y(t), \\ u_4(t) &= y'(t). \end{aligned}$$
  Vi får systemet:
  $$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2, \\ u_2'(t) & = u_1 + 2u_3 - 3(u_2)^2, \\ u_3'(t) & = u_4, \\ u_4'(t) & = u_1 - u_3 - u_4 + t, \\ u_1(-0.1) & = 0, \\ u_2(-0.1) & = -1, \\ u_3(-0.1) & = 2, \\ u_4(-0.1) & = -1. \end{cases}$$
- b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 237.
  Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
  $v_{k+1} = v_k + hf(t_{k+1}, v_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{h}$.
  Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:
  $$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} & = x_{k+1}; \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{h} & = y_{k+1} + x_{k+1}, \end{cases}$$
  som kan skrivas om :
  $$\begin{cases} y_{k+1} - hx_{k+1} & = y_k, \\ x_{k+1} - hy_{k+1} - hx_{k+1} & = x_k \end{cases}$$
  eller
  $$\begin{cases} y_{k+1} - hx_{k+1} & = y_k, \\ -hy_{k+1} + (1 - h)x_{k+1} & = x_k. \end{cases}$$

För att hitta y_{k+1}, x_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [y_{k+1}, x_{k+1}]^T$ och känt vektor $b = [y_k, x_k]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ -h & 1-h \end{bmatrix}.$$

/chalmers/users/larisa/MMG410GU/Matlab/ODE45/backwardEulersystem_ode45-eps-converted-to

Extra material: Matlab's program för implementering av vårt problem. Programmet använder ode45 med bakåt och framåt Eulers metoder:

```
N=100;
y0 = [0 -1]';  % begynnelsevarden
t0 = 0;          % begynnelsetid
ts = 2;         % slut-tid

[t, y] = ode45(@func_exam22018, linspace(t0, ts, N), y0);
```

```
figure(1);
plot(t, y(:, 1), 'b-', t, y(:, 2), 'r-','LineWidth',2)
xlabel('t')

title('  dy_1/dt= y_2, dy_2/dt= y_1 + y_2,y_1(0)=0,y_2(0)=-1')
grid on
hold on


%  framåt Eulers metod

h=(ts-t0)/N;
  t = linspace(t0,ts,N);
  y1 = linspace(t0,ts,N);
 y2 = linspace(t0,ts,N);

y1(1)= 0;  % begynnelsevarden
y2(1)= -1;

for k = 1:N-1
   y1(k+1) = y1(k) + h*func1_exam22018(t(k),y1(k),y2(k));
       y2(k+1) = y2(k) + h*func2_exam22018(t(k),y1(k),y2(k));

end

plot(t, y1, 'b -- ', t,y2,'r--','LineWidth',2)

%  Bakåt Eulers metod
dt=(ts-t0)/N;
t = linspace(t0,ts,N);

A=[1, -dt; -dt, 1 - dt];
x = zeros(1,2);
xnew = zeros(1,2);
x(1) = 0;
x(2) = -1;
 sol1 = linspace(t0,ts,N);
 sol2 = linspace(t0,ts,N);

sol1(1) = x(1);
sol2(1) = x(2);

for k = 1:N-1
  xnew = A\x';
          sol1(k+1) = xnew(1);
          sol2(k+1) = xnew(2);
          x=xnew';
end

plot(t, sol1, 'g -- ', t,sol2,'g-','LineWidth',2)
  legend('y1, ode45', 'y2, ode45','y1, expl.Euler','y2, expl.Euler', ...
'y1, impl.Euler','y2, impl.Euler')
```

```
title('Explicit and implicit Eulers metod vs. ode45 (h=0.02)')
t = text(0.25,-16,'dy_1/dt= y_2, dy_2/dt= y_1 + y_2');
t = text(0.25,-18,'y_1(0)=0,y_2(0)=-1');
```

Matlab's funktion **func_exam22018.m**:

```
function [dy] = func_exam22018(t,y)
dy = zeros(2,1);    % a column vector
dy(1) = y(2);
dy(2) = y(1)  + y(2);
```

Matlab's funktion **func1_exam22018**:

```
function [dy] = func1_exam22018(t,y1,y2)
dy = y2;
```

Matlab's funktion **func2_exam22018**:

```
function [dy] = func2_exam22018(t,y1,y2)
dy = y1  + y2;
```

6. Logaritmera modellproblemet

$$c \approx \exp^{\frac{p_1+p_2t^2}{1+p_3t}}$$

för att få:

$$\begin{aligned}
\ln c &\approx \frac{p_1 + p_2t^2}{1 + p_3t} \to \\
\ln c(1 + p_3t) &\approx p_1 + p_2t^2 \to \\
p_1 + p_2t^2 &\approx \ln c + \ln c \cdot p_3t \to \\
p_1 + p_2t^2 - \ln c \cdot p_3t &\approx \ln c.
\end{aligned}$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [p_1, p_2, p_3]^T$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[1, t_k^2, -t_k \ln c_k], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln(c_1) \\ \ln(c_2) \\ ... \\ \ln(c_m) \end{bmatrix}.$$