Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-01-04

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Visa att $\| \cdot \|_p,\ p = 1$ är matrisnorm.
  (2p)
- b) Skriv talet 7.5 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är en symmetrisk och positivt definit matris, $m - 1$ är ett positivt heltal. Bevisa att A^m är symmetrisk och positivt definit matris.
  (1p)
- d) Låt a och b är reella tal med $a < b$. Definiera fixpunktsiterationen:
  $$x_{k+1} = x_k + (x_k - a)(x_k - b).$$
  Bestäm fixpunkterna och konvergens: bestäm ett villkor för a och b som garanterar konvergens mot åtminstone en av fixpunkterna (vi startar nära, men inte i fixpunkten).
  (3p)

2.
Vi vill hitta ett lokalt minimum till den reellvärda funktion $f(x, y, z),\ x, y, z$ är reella variabler. Vi kan försöka hitta minimum där tre partiella derivatorna av funktionen $f(x, y, z)$ är noll.
Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system när $f(x, y, z) = x + y + z + \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Finn interpolationspolynomet $p(t)$ av grad ett med basfunktioner $t^j, j = 0, 1$ som interpolerar punkterna $(1, 5), (2, 4)$.
(2p)

4.

- Vi har en kvadraturformel
  $$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$
  för lämpliga punkterna $x_1, ..., x_n$ och vikterna $w_1, ..., w_n$. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[-5, 3]$?
  (2p)
- Använd trapetsmetoden i två punkter 0 och π för att beräkna integralen $\int_0^\pi \cos x\, dx$.
  (2p)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} u''(t) = tu(t) + 3(v(t))^2 - 3u'(t), \\ v''(t) = u(t) - (v(t))^2 - v'(t) + t^2, \\ u(-1) = 0, \\ u'(-1) = -1, \\ v(-1) = 2, \\ v'(-1) = -1. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet (**2p**)

$$\begin{cases} y'(t) = 5x(t) + 3y(t), \\ x'(t) = y(t), \\ y(-1) = 1, \\ x(-1) = 1. \end{cases}$$

---

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c = \sqrt{(t + p_1 p_2 t^2 + p_2)}$$

där p_1, p_2 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2 givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.

(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-01-04

1.

- a) För att visa att $\|\cdot\|_p,\ p=1$ är matrisnorm, vi ska kolla matrisnormvillkoren för $p=1$:

  1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$ så om $A \neq 0$ finns något $a_{i,j} \neq 0$ varför $\|A\|_1 > 0$.
  2) $\|\gamma A\|_1 = \max_j \sum_i |\gamma a_{i,j}| = \max_j \sum_i |\gamma||a_{i,j}| = |\gamma| \max_j \sum_i |a_{i,j}| = |\gamma|\|A\|_1$
  3) $\|A+B\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \max_j \sum_i (|a_{i,j}|+|b_{i,j}|) \leq \max_j \sum_i |a_{i,j}| + \max_j \sum_i |b_{i,j}| = \|A\|_1 + \|B\|_1$

  Nu till submultiplikativiteten. Vi visar $\|A\mathbf{x}\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{x}\|_1$ först. Det följer från definitionen av normen
  $$\|A\|_1 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$
  att $\|A\|_1 \geq \|A\mathbf{x}\|_1\|\mathbf{x}\|_1$. Nu till $\|AB\|_1$. Antag att max antas för kolonn k i B:
  $$\|AB\|_1 = \|A\mathbf{b}_k\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{b}_k\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1$$

- b) Vi skriver talet som $7.5 = +[1+0.875]\cdot 2^2$. Exponenten är 2 och vi presenterar den som: $2+1023 = 1025 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^0$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.875 = 1\cdot 1/2 + 1\cdot 1/4 + 1\cdot 1/8$. Vi får följande binär representation för 7.5:
  $$|0|\underbrace{10000000001}_{exponenten}|\quad \underbrace{1110....0}_{mantissa\ 52\ bitar}\quad|$$

  där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar kodas som 10000000001 och mantissa 52 bitar kodas som 111000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi grupperar om binär form i 4 bitar :

  $$0100\ \ 0000\ \ 0001\ \ 1110\ \ ....\ \ 0000$$
  och kodar varje fyra bitar:
  $$\begin{aligned} 0100 &= 4,\\ 0000 &= 0,\\ 0001 &= 1,\\ 1110 &= e,\\ 0000 &= 0,\\ &\dots \end{aligned}$$

  Hexadecimalt (bas 16) format för 7.5 är:
  $$401e000000000000.$$

  Kolla i Matlab:

```
q = quantizer('double');
y = num2bin(q,7.5)
```

```
y =

0100000000011111000000000000000000000000000000000000000000000000

 y = num2hex(q,7.5)

y =
401e000000000000
```

- c) För symmetrin: $(A^m)^T = A^T \cdot .... \cdot A^T = A \cdot .... \cdot A = A^m$. Vi använder definitionen för att bevisa att A^m är positivt definit. Låt $x \neq 0$. Om m är udda tag $n = (m-1)/2$. Då $x^T A^m x = x^T A^{(m-1)/2} A A^{(m-1)/2} x = (A^n x)^T A (A^n x) = (A^n)^T x^T A (A^n x) > 0$ eftersom $A^n x \neq 0$ (eftersom $x \neq 0$ och A är positivt definit då A är ickesingulär). Är m jämnt, då tag $n = m/2$. Vi får: $x^T A^m x = (A^n x)^T (A^n x) = \|A^n x\|_2^2 > 0$.
  Det betyder att A är symmetrisk och positivt definit.
- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.
  Fixpunktsiterationsmetod är:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

med $g(x_k) = x_k + (x_k - a)(x_k - b)$. Då $g(x) = x + (x-a)(x-b)$.
För att bestämma fixpunkter ska vi lösa:

$$x^* = g(x^*),$$

eller

$$x^* - g(x^*) = 0.$$

För $g(x^*) = x^* + (x^* - a)(x^* - b)$ ska vi lösa

$$x^* - x^* - (x^* - a)(x^* - b) = 0.$$

eller

$$(x^*)^2 - x^*(b+a) + ab = 0.$$

Fixpunkterna:

$$x^* = a, x^* = b.$$

För konvergensen kräver vi $|g'(x^*)| < 1$.

$$g'(x) = 1 + (x-b) + (x-a) = 1 + 2x - b - a.$$

För fixpunkt $x^* = a$ metoden är konvergent för $-2 < a - b < 0$ eftersom $a < b$ och:

$$\begin{aligned} |g'(a)| &= |1 + 2a - b - a| = |1 + a - b| < 1, \\ &-1 < 1 + a - b < 1, \\ &-2 < a - b < 0. \end{aligned}$$

För fixpunkt $x^* = b$ metoden är divergent eftersom $a < b$ och

$$\begin{aligned} |g'(b)| &= |1 + 2b - b - a| = |1 + b - a| < 1, \\ &-1 < 1 + b - a < 1, \\ &-2 < b - a < 0 \rightarrow \text{ stämmer inte eftersom } b > a. \end{aligned}$$

Slutsats:
$|g'(a)| < 1$ för $x^* = a$ och metoden är konvergent för $\ -2 < a - b < 0$,
för $x^* = b$ metoden är divergent.

2.
Vi inför vektorn $a = [x, y, z]^T$ och skriver $f(a)$ istället för $f(x, y, z)$. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} f_1 &:= f'_x(x, y, z) = 1 + 2x\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ f_2 &:= f'_y(x, y, z) = 1 + 2y\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ f_3 &:= f'_z(x, y, z) = 1 + 2z\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned}$$

Newtons metod kan skrivas:

$$a^{k+1} = a^k - [J(a^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 + 2x^k\cos((x^k)^2 + (y^k)^2 + (z^k)^2) \\ 1 + 2y^k\cos((x^k)^2 + (y^k)^2 + (z^k)^2) \\ 1 + 2z^k\cos((x^k)^2 + (y^k)^2 + (z^k)^2) \end{bmatrix},$$

där $J(a^k)$ är Jakobian på iteration k och

$$J(a) = \begin{bmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y & (f_1)'_z \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y & (f_2)'_z \\ (f_3)'_x & (f_3)'_y & (f_3)'_z \end{bmatrix}$$

och var

$$\begin{aligned} (f_1)'_x &= 2\cos(x^2 + y^2 + z^2) - 4x^2\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_1)'_y &= -4xy\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_1)'_z &= -4xz\sin(x^2 + y^2 + z^2) \\ (f_2)'_x &= -4xy\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_2)'_y &= 2\cos(x^2 + y^2 + z^2) - 4y^2\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_2)'_z &= -4zy\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_3)'_x &= -4xz\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_3)'_y &= -4zy\sin(x^2 + y^2 + z^2), \\ (f_3)'_z &= 2\cos(x^2 + y^2 + z^2) - 4z^2\sin(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

3.
För punkter $(1, 5), (2, 4)$ har vi: $p(t_1) = 5, p(t_2) = 4, t_1 = 1, t_2 = 2$.
Interpolationspolynomet $p(t)$ av grad 1 med basfunktioner t^j är:

$$p(t) = x_1 + x_2 t.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{0.1}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{0.2}$$

vilket ger $x_1 = 6, x_2 = -1$, och interpolationspolynomet blir

$$p(t) = x_1 + x_2 t = 6 - t.$$

4.

- a)
  Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[-1, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = kx + m.$$

För att bestämma koefficienter k, m ska vi lösa system:

$$k \cdot (-1) + m = -5,$$
$$k \cdot 1 + m = 3,$$

då

$$m = -1, \ k = 4.$$

Linjär avbilding är:

$$t = 4x - 1.$$

Notera att

$$dt = 4dx; f(t) = f(4 \cdot x - 1),$$

integral $\int_{-5}^{3} f(t)dt$ ska beräknas som:

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{3} f(t)dt &= 4 \cdot \int_{-1}^{1} f(4 \cdot x - 1) \ dx \\ &\approx 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i f(4 \cdot x_i - 1). \end{aligned}$$

- b)
  Trapetsmetoden för $\int_0^\pi f(x)dx$ är:

$$\int_0^\pi f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(\pi)) \cdot (\pi - 0).$$

I vårt fall har vi $f(x) = \cos x, f(0) = 1, f(\pi) = -1$, då trapetsmetoden för $\int_0^\pi \cos x \ dx$ ger oss:

$$\int_0^\pi \cos x \ dx \approx \frac{1}{2}(1 + (-1))\pi = 0.$$

5.

- a) Sätt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u(t),\\ x_2(t) &= u'(t),\\ x_3(t) &= v(t),\\ x_4(t) &= v'(t). \end{aligned}$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x_2(t),\\ x_2'(t) & = tx_1(t) + 3(x_3(t))^2 - 3x_2(t),\\ x_3'(t) & = x_4(t),\\ x_4'(t) & = x_1(t) - (x_3(t))^2 - x_4 + t^2,\\ x_1(-1) & = 0,\\ x_2(-1) & = -1,\\ x_3(-1) & = 2,\\ x_4(-1) & = -1. \end{cases}$$

- b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 237.
  Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
  $v_{k+1} = v_k + hf(t_{k+1}, v_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1}-v_k}{h}$, var $v_k = v(t_k)$.
  Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}-y_k}{h} & = 5x_{k+1} + 3y_{k+1};\\ \frac{x_{k+1}-x_k}{h} & = y_{k+1}, \end{cases}$$

som kan skrivas om :

$$\begin{cases} y_{k+1} - h(5x_{k+1} + 3y_{k+1}) & = y_k,\\ x_{k+1} - hy_{k+1} & = x_k \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} (1-3h)y_{k+1} - 5hx_{k+1} & = y_k,\\ -hy_{k+1} + x_{k+1} & = x_k. \end{cases}$$

För att hitta y_{k+1}, x_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [y_{k+1}, x_{k+1}]^T$, känt vektor $b = [y_k, x_k]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1-3h & -5h \\ -h & 1 \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi : $[y_0, x_0]^T = [y(t_0), x(t_0)]^T = [y(-1), x(-1)]^T = [1, 1]^T$. Första iteration i Bakåt-Eulers metod ska vara:

$$[y_1, x_1]^T = A^{-1}[y_0, x_0]^T = A^{-1}[1, 1]^T.$$

6. Kvadrera

$$c^2 = t + p_1p_2t^2 + p_2$$

och flytta över t:

$$p_1 p_2 t^2 + p_2 = c^2 - t.$$

Inför $x_1 = p_1 p_2, x_2 = p_2$. Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2]^T$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[t_k^2, 1], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} c_1^2 - t_1 \\ c_2^2 - t_2 \\ ... \\ c_m^2 - t_m \end{bmatrix}.$$

Efter att vi har löst $\min_x \|Ax - b\|_2^2$ sätter vi $p_2 = x_2, p_1 = x_1/p_2 = x_1/x_2$.