Numerisk Analys, MMG410. Lecture 11.

Fixpunkter och lite teori

Vi har två syften med de följande sidorna:

- givet en ekvation, $f(x) = 0$, hitta en fixpunktsiteration, g, som har en attraktiv fixpunkt, x^* sådan att $f(x^*) = 0$.
- vi vill förstå vilka egenskaper hos g som ger konvergens

Newtons metod är en speciell fixpunktsiteration, ty

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; x_{k+1} = g(x_k) \text{ med } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Om Newtons metod konvergerar mot x^* gäller i gränsen att

$$x^* = x^* - \frac{f(x*)}{f'(x^*)}$$

dvs. $f(x^*) = 0$ (antag enkelrot så att $f'(x^*) \neq 0$). Så fixpunkten är en lösning till vårt problem.

Om vi ska lösa $f(x) = 0$ med fixpunktsiteration: $f(x) - x + x = 0$ och $f(x) + x = x$ och fixpunktsiteration är: $x_{k+1} = x_k + f(x_k)$.

När konvergerar en fixpunktsiteration?

Fixpunkter och lite teori

Dvs. <u>om</u> det existerar x^* så att $x^* = g(x^*)$, när gäller att

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - x^*| = 0?$$

Idé: konvergens medför att felet, $|x_k - x^*|$, minskar dvs. $|x_{k+1} - x^*| < |x_k - x^*|$, så låt oss studera felet.

$$x_{k+1} - x^* = g(x_k) - x^* = g(x^* + x_k - x^*) - x^* =$$

$$g(x^*) + (x_k - x^*)g'(\theta_k) - x^* = g'(\theta_k)(x_k - x^*),\ \theta_k \in (x_k, x^*)$$

Så

$$|x_{k+1} - x^*| = |g'(\theta_k)|\ |x_k - x^*|,\ \theta_k \in (x_k, x^*)$$

Ett steg till:

$$|x_{k+2} - x^*| = |g'(\theta_{k+1})|\ |x_{k+1} - x^*| = |g'(\theta_{k+1})|\ \underbrace{|g'(\theta_k)|\ |x_k - x^*|}_{|x_{k+1}-x^*|}$$

Alltså:

$$|x_k - x^*| = \underbrace{|g'(\theta_{k-1})|\ \dots\ |g'(\theta_1)|\ |g'(\theta_0)|}_{|g'(\theta)|}\ |x_0 - x^*| = |g'(\theta)||x_0 - x^*|.$$

Fixpunkter och lite teori

Så om det finns ett tal λ, där alla $|g'(\theta_k)| \leq \lambda < 1$ får vi konvergens.

$$|x_k - x^*| \leq \lambda^k |x_0 - x^*|$$

Följande villkor garanterar konvergens:

- x_0 tillräckligt nära x^*
- g kontinuerligt deriverbar med $|g'(x^*)| < 1$

Den andra punkter medför att det existerar ett intervall, $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ sådant att $|g'(x)| \leq \lambda < 1, \; x \in I$.

Om vi ser till att starta tillräckligt nära x^* så stannar alla x_k kvar i intervallet. Detta medför att alla $\theta_k \in I$.
Första steget: Om $x_0 \in I$ så gäller att $\theta_0 \in I$, varför $|g'(\theta_0)| \leq \lambda$ vilket medför att $x_1 \in I$. Induktion!
Normalt linjär konvergens; ju mindre $|g'(x^*)|$ desto snabbare konvergens

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \to |g'(x^*)|$$

Fixpunkter och lite teori

Vad gäller för Newtons metod?

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \;\Rightarrow$$

$$g'(x^*) = 1 - \frac{(f'(x^*))^2 - f''(x^*)f(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0, \text{ om } x^* \text{ enkelrot}$$

Innebär (minst) kvadratisk konvergens (inte att det konvergerar i ett steg). Låt oss troliggöra detta. Inför $\delta_k = x_k - x^*$. Vi får

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x^* + x_k - x^*)}{f'(x^* + x_k - x^*)}$$

eller

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{f(x^* + \delta_k)}{f'(x^* + \delta_k)} = \delta_k - \frac{f(x^*) + \delta_k f'(x^*) + \delta_k^2 f''(x^*)/2 + \ldots}{f'(x^*) + \delta_k f''(x^*) + \ldots}$$

så att

$$\delta_{k+1} = \frac{\delta_k^2 f''(x^*)/2 + \ldots}{f'(x^*) + \delta_k f''(x^*) + \ldots} \approx \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\delta_k^2$$

Konvergens för sekantmetod

Vad gäller för sekantmetod? Iterera: givet två startvärden x_0, x_1 sekantmetoden:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}, \;\; k = 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - f(x_k)\frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\ &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_k f(x_k) - f(x_k)x_{k-1} + f(x_k)x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\ &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)x_{k-1}}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)x_{k-1}}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} - x^* \\ &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)x_{k-1} - x^*(f(x_{k-1}) - f(x_k))}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \end{aligned} \tag{2}$$

och kan skrivas som

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - x^* &= \frac{x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)x_{k-1} - x^* f(x_{k-1}) + x^* f(x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\
&= \frac{(x_k - x^*)f(x_{k-1}) - f(x_k)(x_{k-1} - x^*)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \\
&= \frac{(x_k - x^*)f(x^* + x_{k-1} - x^*) - f(x^* + x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*)}{f(x^* + x_{k-1} - x^*) - f(x^* + x_k - x^*)} \\
&= \frac{(x_k - x^*)[f(x^*) + (x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})]}{f(x^* + x_{k-1} - x^*) - f(x^* + x_k - x^*)} \\
&- \frac{[f(x^*) + (x_k - x^*)f'(\xi_k)](x_{k-1} - x^*)}{f(x^* + x_{k-1} - x^*) - f(x^* + x_k - x^*)} \\
&= \frac{(x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})}{f(x^*) + (x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})) - f(x^*) - (x_k - x^*)f'(\xi_k)} \\
&- \frac{[(x_{k-1} - x^*)(x_k - x^*)f'(\xi_k)]}{f(x^*) + (x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})) - f(x^*) - (x_k - x^*)f'(\xi_k)}, \\
&\xi_k \in (x_k, x^*),\ \xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x^*).
\end{aligned} \tag{3}$$

Vi får:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - x^* &= \frac{(x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})}{(x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})) - (x_k - x^*)f'(\xi_k)} \\
&- \frac{[(x_{k-1} - x^*)(x_k - x^*)f'(\xi_k)]}{(x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})) - (x_k - x^*)f'(\xi_k)} \\
&= \frac{(x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*)[f'(\xi_{k-1}) - f'(\xi_k)]}{(x_{k-1} - x^*)f'(\xi_{k-1})) - (x_k - x^*)f'(\xi_k)} \\
&= (x_k - x^*)(x_{k-1} - x^*) \cdot M \\
&\xi_k \in (x_k, x^*),\ \ \xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x^*).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\text{Om } f(x^*) = 0 \text{ och } \lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^r} = C \text{ konstant } < \infty
$$

så säger vi att metoden har konvergensordning r. Vi kan skriva om det som:

$$
|x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^r \approx |x_k - x^*||x_{k-1} - x^*| \cdot |M|
$$

eller

$$
\begin{aligned}
C|x_k - x^*|^r &\approx |x_k - x^*||x_{k-1} - x^*| \cdot {\color{blue}|M|}, \\
\frac{|x_k - x^*|^r}{|x_k - x^*|} &\approx |M|/|C| \cdot |x_{k-1} - x^*|, \\
|x_k - x^*|^{r-1} &\approx |M|/|C| \cdot |x_{k-1} - x^*|, \qquad (5) \\
|x_k - x^*| &\approx \underbrace{(|M|/|C|)^{1/r-1}}_{B:=Const} \cdot (|x_{k-1} - x^*|)^{1/r-1}, \\
|x_k - x^*| &\approx B \cdot (|x_{k-1} - x^*|)^{1/r-1}
\end{aligned}
$$

Vi tar $1/(r-1) = r$ konvergensordning (enligt definition för konvergensordningen). Darför $r(r-1) = 1; r^2 - r - 1 = 0$ och vi tar bara $r > 0$, eller $r = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618 > 0$ som är konvergensordning för sekantmetoden (superlinjär).

Fixpunkter och lite teori

Några exempel:

- $g(x) = x^2$ har vi redan analyserat. $x_{k+1} = g(x_k)$ eller $x_{k+1} = x_k^2$. Fixpunkter? $g(x^*) = x^*$ eller $(x^*)^2 = x^*$ så $x^* = 0$ eller $x^* = 1$. Konvergens? $g'(x) = 2x$ och $g'(0) = 0$ så bättre än linjär konvergens, $g'(1) = 2$ divergens. $x_0 = 10^{-1}, x_1 = 10^{-2}, x_2 = 10^{-4}\ldots$
- $g(x) = x/2$. Fixpunkter: $x^* = x^*/2$ så $x^* = 0$. Konvergens? $g'(x^*) = 1/2$. Linjär konvergens: $x_0 = 1, x_1 = 1/2, x_2 = 1/4, \ldots$
- $g(x) = \cos x$. Fixpunkter $x^* = \cos x^*$ så $x^* \approx 0.739$. Konvergens? $g'(x^*) = -\sin(x^*)$ och $|-\sin(x^*)| \approx 0.674 < 1$ så linjär konvergens
- Lös $x^2 - 2 = 0$. Vi kan ju använda Newtons metod, men låt oss testa med omskrivningen $[x^2 - 2]/\alpha + x = x$ och tag $g(x) = [x^2 - 2]/\alpha + x$. Fixpunkterna är rötterna till ekvationen.

Fixpunkter och lite teori

Konvergens? $g'(x) = 2x/\alpha + 1$. Tar vi t.ex. $\alpha = -3$ så får vi rätt snabb konvergens ty $|g'(\sqrt{2})|| = |-2\sqrt{2}/3 + 1| \approx 0.05719$.

```
>> x = 1;
>> for k=1:9, x(k+1)=x(k)-(x(k)^2 - 2) / 3; end
>> d = x - sqrt(2)     % editerat
d = -4.1e-01  -8.0e-02  -6.8e-03  -4.0e-04  -2.3e-05
    -1.3e-06  -7.5e-08  -4.6e-09  -2.4e-10  -1.4e-11

>> abs(d(2:end) ./ d(1:end-1))
 1.9526e-01  8.4151e-02  5.9460e-02  5.7326e-02
 5.7199e-02  5.7191e-02  5.7191e-02  5.7191e-02
 5.7192e-02
```