Numerisk Analys, MMG410. Lecture 13.

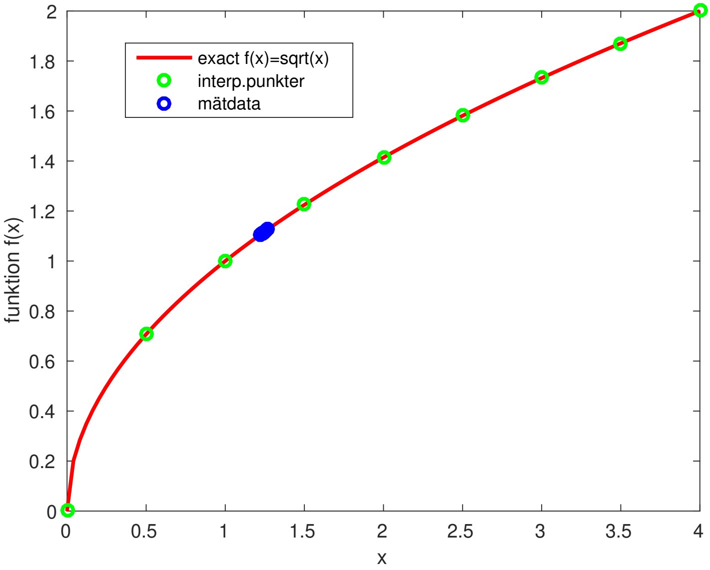
Interpolation

För i tiden gällde räknesticka och tabeller. Beräkna $\sqrt{1.244}$ givet en tabel över $y = \sqrt{t}$, y-värdena är givna med fem siffror, och $t = 0, 0.01, 0.02, ..., 9.99, 10.00$.

Mer realistiskt, nu för tiden, vore en tabell, $t_k, y_k, k = 1, ..., n$ där vi av någon anledning inte kan beräkna $y(t)$ för alla t (mätttekniska problem, gamla data).

Hur ska vi gå tillväga? I skoltabellen fanns röda tal mellan y-värdena, differenser, för att underlätta linjär interpolation

t		y
	...	
1.22		1.1045
1.23		1.1091
1.24		**1.1136**
1.25		**1.1180**
1.26		1.1225
1.27		1.1269


exact f(x)=sqrt(x)
interp.punkter
mätdata
funktion f(x)
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Interpolation

Givet (t_k, y_k) och (t_{k+1}, y_{k+1}) söker vi y-värden svarande mot t, $t_k < t < t_{k+1}$. Linjär interpolation ger

$$y \approx y_k + (t - t_k)\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}$$

Så i exemplet (vi ska räkna $y = \sqrt{t}$ för $t = 1.244, t_{k+1} = 1.25, t_k = 1.24, y(t_k) = y_k = 1.1136, y(t_{k+1}) = y_{k+1} = 1.1180, y_{k+1} - y_k = 0.0044$):

$$\sqrt{1.244} \approx 1.1136 + (1.244 - 1.24)\frac{0.0044}{1.25 - 1.24} = 1.11536$$

Felet $\approx -1.3 \cdot 10^{-5}$.

Andra tillämpningar som nyttjar interpolation är kvadratur (integration), lösning av randvärdesproblem, förenkling av funktioner, härledning av metoden (t.ex. sekantmetoden).

Interpolation

Allmänt har vi $(t_k, y_k), k = 1, ..., m$ med $t_1 < t_2 < ... < t_m$ och vill hitta en funktion (polynom i denna kurs), p, så att $p(t_k) = y_k, k = 1, ..., m$. Ibland lägger man dessutom på krav på derivator, s.k. Hermite-interpolation.

Låt oss anta att det finns en underliggande funktion, f, (i exemplet $\sqrt{}$) som vi vill interpolera. Denna funktion är inte alltid känd.

Vi känner y_1, y_2 som är approximationer av f i två punkter $t_1 < t_2, y_1 = f(t_1) + \delta_1$ samt $y_2 = f(t_2) + \delta_2$ och vill approximera $f(t)$ där $t_1 < t < t_2$.
Vi bestämmer nu interpolationspolynomet, p, som uppfyller interpolationsvillkoren: $p(t_1) = y_1$ samt $p(t_2) = y_2$. Två villkor bestämmer en konstant- eller en linjär funktion så vi kräver att p har grad ≤ 1. Ansätt $p(t) = x_1 + x_2 t$ vilket ger följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 t_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 t_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (t_2 y_1 - t_1 y_2)/(t_2 - t_1) \\ x_2 = (y_2 - y_1)/(t_2 - t_1) \end{cases}$$

så att

$$p(t) = \underbrace{\frac{t_2 y_1 - t_1 y_2}{t_2 - t_1}}_{x_1} + \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}}_{x_2} t = y_1 + (t - t_1)\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

Observera att den andra omskrivningen svarar direkt mot tabellräkningen. Felet, $p(t) - f(t)$ kan skrivas enligt:

$$\underbrace{p(t)}_{\textit{beräknad}} - \underbrace{f(t)}_{\textit{exakt}} = \underbrace{f(t_1) + \delta_1}_{y_1} + (t - t_1)\frac{\overbrace{f(t_2) + \delta_2}^{}\!\!\!\!\!\!\underbrace{}_{y_2} - (\underbrace{f(t_1) + \delta_1}_{y_1})}{t_2 - t_1} - f(t) =$$

$$\underbrace{f(t_1) + (t - t_1)\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}_{p_f(t)} - f(t) + \underbrace{\delta_1 + (t - t_1)\frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}}_{p_\delta(t)}$$

Interpolation

Låt oss införa de två polynomen p_f och p_δ sådana att

$$p_f(t_1) = f(t_1) = f(t_1) + \underbrace{(t_1 - t_1)\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}_{0}, \tag{1}$$

$$p_f(t_2) = f(t_2) = f(t_1) + \underbrace{(t_2 - t_1)\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}_{f(t_2) - f(t_1)} \tag{2}$$

resp.

$$p_\delta(t_1) = \delta_1 = \delta_1 + \underbrace{(t_1 - t_1)\frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}}_{0}, \tag{3}$$

$$p_\delta(t_2) = \delta_2 = \delta_1 + \underbrace{(t_2 - t_1)\frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}}_{\delta_2 - \delta_1} \tag{4}$$

Då är tydligen $p = p_f + p_\delta$.

Vi vet redan:

$$\underbrace{p(t)}_{beräknad} - \underbrace{f(t)}_{exakt} = \underbrace{f(t_1)+\delta_1}_{y_1} + (t-t_1)\frac{\overbrace{\underbrace{f(t_2)+\delta_2}_{y_2} - (\underbrace{f(t_1)+\delta_1}_{y_1})}}{t_2-t_1} - f(t) =$$

$$\underbrace{f(t_1)+(t-t_1)\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}}_{p_f(t)} - f(t) + \underbrace{\delta_1 + (t-t_1)\frac{\delta_2-\delta_1}{t_2-t_1}}_{p_\delta(t)}$$

Detta kan man direkt se från det linjära ekvationssystemet, lösningen x beror ju linjärt på högerledet.

$$\underbrace{p(t)}_{beräknad} - \underbrace{f(t)}_{exakt} = p_f(t) + p_\delta(t) - f(t) = \underbrace{p_f(t) - f(t)}_{approxim.fel} + \underbrace{p_\delta(t)}_{avrundningsfel}$$

De två delarna i felet kan tolkas som följer: $p_f(t) - f(t)$ anger hur väl p_f approximerar funktionsvärdena om de hade varit utan fel. $p_\delta(t)$ interpolerar (avrundnings)felen i tabellvärdena.

Interpolation (Felets utseende)

Låt oss nu uppskatta felet $e(t) = f(t) - p_f(t)$ (denna härledning kan rätt lätt generaliseras till polynom av högre gradtal). Vi antar att $t \neq t_1, t_2$ ty $e(t_1) = e(t_2) = 0$. Inför

$$g(z) = e(z) - \frac{(z - t_1)(z - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)} e(t)$$

där vi betraktar t som en fix punkt, g beror alltså av z. Det gäller att $g(t_1) = g(t_2) = 0$ och dessutom är $g(t) = 0$:

$$g(t) = e(t) - \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)} e(t) = 0, \tag{5}$$

$$g(t_1) = e(t_1) - \frac{(t_1 - t_1)(t_1 - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)} e(t) = 0, \tag{6}$$

$$g(t_2) = e(t_2) - \frac{(t_2 - t_1)(t_2 - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)} e(t) = 0. \tag{7}$$

g har alltså tre distinkta nollställen varför, enligt medelvärdessatsen, $g'(z)$ har två distinkta nolställen. $g''(z)$ har alltså ett nollställe, kalla det $\theta \in (t, t_1, t_2)$ (det minsta intervall som innehåller t, t_1, t_2).

Vi deriverar nu g (med avseende på z och får (ty grad $p_f \leq 1$):

$$g''(z) = e''(z) - \frac{2e(t)}{(t-t_1)(t-t_2)} = f''(z) - \frac{2e(t)}{(t-t_1)(t-t_2)}.$$

Eftersom $g''(\theta) = 0$ kan vi lösa ut $e(t)$ från

$$g''(\theta) = f''(\theta) - \frac{2e(t)}{(t-t_1)(t-t_2)} = 0,$$

och får

$$e(t) = \underbrace{f(t) - p_f(t)}_{approxim.fel} = \frac{f''(\theta)}{2}(t-t_1)(t-t_2),$$

var $\theta \in (t, t_1, t_2)$ (det minsta intervall som innehåller t, t_1, t_2).

Interpolation (Felets utseende)

Felet är noll då $t = t_1$ eller $t = t_2$. Faktorn $(t - t_1)(t - t_2)$ mäter hur långt t ligger från någondera ändpunkten. Om $t_1 < t < t_2$ så antar $(t - t_1)(t - t_2)$ sitt mest negativa värde då $t = (t_1 + t_2)/2$.

$f''(\theta)$ är ett mått på krökningen hos f, dvs. hur mycket f "buktar ut" från en rät linje. Om krökningen är noll, $f''(\theta) = 0$, så är f linjär och felet är noll.

Krökningsradien, $R = (1 + (f'(\theta))^2)^{3/2}/f''(\theta)$. Krökningen är $1/R$.

Antag att vi tar med fler punkter och interpolerar med ett polynom av högre gradtal. Kommer felet i approximationen att minska? Vi kan först se på den allmänna satsen:

Interpolation (Felets utseende)

Sats

Om p_f interpolerar f för de n $t-$värdena $t_1 < t_2 < ... < t_n$ så gäller att

$$\underbrace{f(t) - p_f(t)}_{approxim.fel} = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)$$

där $\theta \in (t, t_1, t_2, ..., t_n)$.

$n!$ ser lovande ut, men resten är inte lätt att bedöma (θ känner vi t.ex. inte till). så vi ser på vårt exempel istället.

$$p(t) - f(t) = p_f(t) - f(t) + p_\delta(t)$$

så även om vi kan göra $p_f(t) - f(t)$ mindre kommer $p_\delta(t)$, som svarar mot avrundningsfelet i tabellvärdena, att vara tämligen konstant, $10^{-5} - 10^{-6}$.

Interpolation (Felets utseende)

Situationen ändras om tabellvärdena hade givits med mindre fel, anta att $\delta_1 = \delta_2 = 0$. I exemplet hade då felet i approximationen varit 10^{-6} med två punkter (förstagradspolynom), $\approx 10^{-8}$ med tre punkter (andragradspolynom), $\approx 10^{-10}$ med fyra punkter och $\approx 10^{-12}$ med fem punkter.

Observera att felet beror på hur t-punkterna ligger relativt den punkt där vi vill approximera f.

Så det kan löna sig att höja gradtalet förutsatt att tabellvärdena inte har för stora fel. Polynom av höga gradtal är dock inte lätthanterliga, mer om detta senare.
Kan vi använda polynomet för att extrapolera (gå utanför $[t_1, t_n]$)? Vi vet att $|p(t)| \to \infty$ när $|t| \to \infty$ (om inte p är konstant), så det kan vara vanskligt. Polynom kan växa snabbt!

Interpolation (Entydighet)

Det står polynomet i bestämd form, detta pga. att det alltid existerar och är entydigt.

Sats

Interpolationsproblemet: hitta ett polynom p med grad högst $n-1$ sådant att $p(t_k) = y_k, k = 1, 2, .., n$, där alla (t_k, y_k) är givna och $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

Låt oss anta att existensen är given och studera entydigheten. Antag att det finns ett annat polynom q av grad $\leq n-1$ som interpolerar data. Det gäller då att $p(t_k) - q(t_k) = 0, k = 1, 2, .., m$. Polynomet $p - q$ av grad $\leq n-1$ har alltså n distinkta nollställen. $p - q$ måste således vara nollpolynomet och $p = q$. Polynomet behöver inte alltid ha grad $n-1$. Om vi t.ex. väljer punkterna $y_k = t_k^2, k = 1, 2, ..., 10$ så klarar vi oss med $p(t) = t^2$ fastän $n = 10$.
Nu till existensen. Den går att bevisa på flera sätt. Vi kommer att använda ett konstruktivt bevis. Antag att vi har $n = 3$ punkter.

Interpolation (Lagranges form)

Sats

Här följer interpolationspolynomet på Lagranges form:

$$p(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

En fördel med denna form på polynomet är att den är lätt att ställa upp och att den kan vara användbar vid teoretiskt arbete. Formen lämpar sig dock inte så väl för numeriska beräkningar (många operationer). Det finns också risk för under- och overflow om man inte tänker sig för.

Interpolation (Lagranges form)

Given a set of $k+1$ data points $(x_0, y_0), \ldots, (x_j, y_j), \ldots, (x_k, y_k)$ where no two x_j are the same, the interpolation polynomial in the Lagrange form is a linear combination

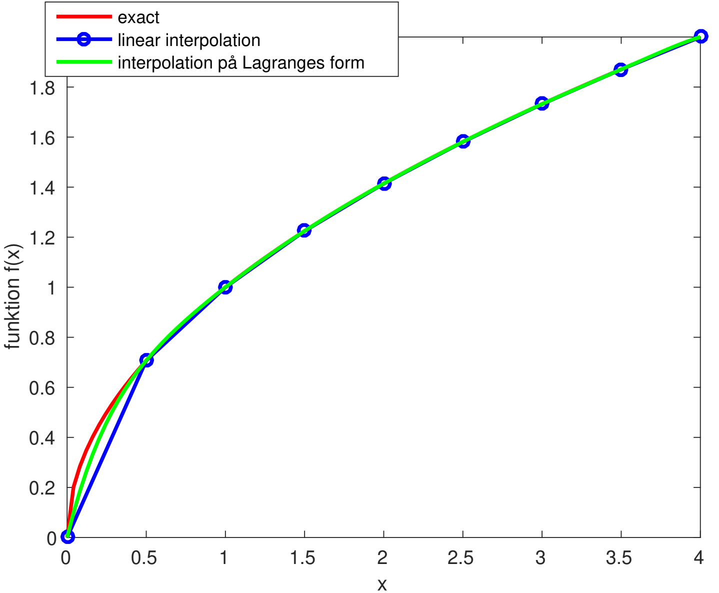
$$L(x) := \sum_{j=0}^{k} y_j \ell_j(x)$$

of Lagrange basis polynomials

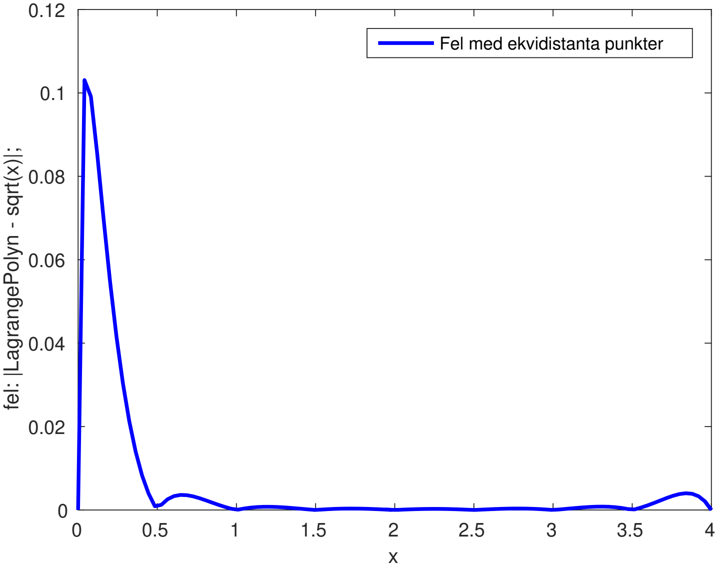
$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \le m \le k \\ m \ne j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)},$$

where $0 \le j \le k$.

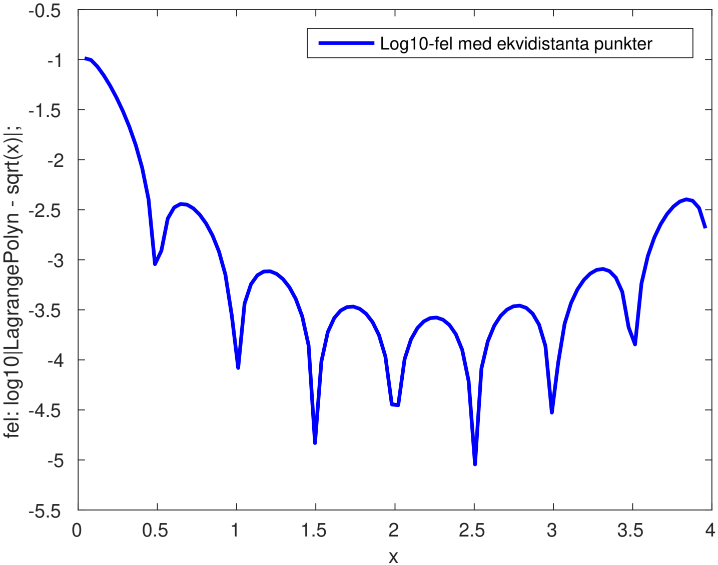
Interpolation i Lagrange form i 9 punkter för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel för $f(x) = \sqrt{x}$



Example

Interpolera funktionen $f(t) = t^2$ på $1 \leq t \leq 3$, i punkter:
$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.
Svar:
Vi har: $y_1 = f(t_1) = 1, y_2 = f(t_2) = 4, y_3 = f(t_3) = 9$.
Här följer interpolationspolynomet på Lagranges form:

$$L(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

$$L(t) = 1 \cdot \frac{t-2}{1-2} \cdot \frac{t-3}{1-3} + 4 \cdot \frac{t-1}{2-1} \cdot \frac{t-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{t-1}{3-1} \cdot \frac{t-2}{3-2}$$

$$= t^2.$$

Interpolera funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 3$, i punkter:
$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.
Här följer interpolationspolynomet på Lagranges form:

$$L(t) = y_1 \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + y_2 \frac{(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + y_3 \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

Example

Interpolera funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 3$, i punkter:
$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3.$
Svar:
Vi har: $y_1 = f(t_1) = 1, y_2 = f(t_2) = 8, y_3 = f(t_3) = 27.$
Här följer interpolationspolynomet på Lagranges form:

$$L(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

$$L(t) = 1 \cdot \frac{t-2}{1-2} \cdot \frac{t-3}{1-3} + 8 \cdot \frac{t-1}{2-1} \cdot \frac{t-3}{2-3} + 27 \cdot \frac{t-1}{3-1} \cdot \frac{t-2}{3-2}$$

$$= 6t^2 - 11t + 6.$$

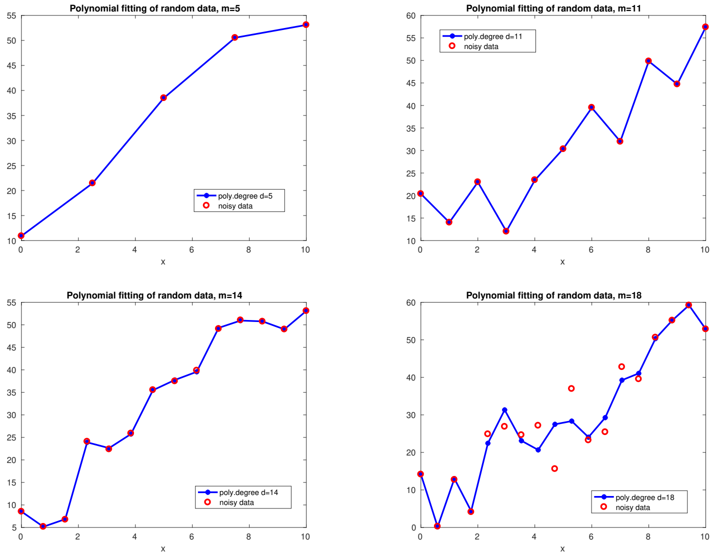
Interpolation (Vandermondematrisen)

Ett annat sätt att konstruera polynomet är att sätta upp ett ekvationssystem som vi gjorde i det linjära fallet. Så vi ansätter $p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$. Interpolationsvillkoren ger då:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

I linjäralgebrakursen brukar man visa att en sådan matris, en Vandermonde-matris, är ickesingulär om alla t-värdena är distinkta.

Detta system är lätt att formulera men relativt dyrt att lösa (kubisk kostnad) men det finns snabbare metoder som utnyttjar matrisens utseende. Normalt har man dock inte speciellt höga gradtal. Det är dock billigt och stabilt att beräkna $p(t)$.


Polynomial fitting of random data, m=5
poly.degree d=5
noisy data
x
Polynomial fitting of random data, m=11
poly.degree d=11
noisy data
x
Polynomial fitting of random data, m=14
poly.degree d=14
noisy data
x
Polynomial fitting of random data, m=18
poly.degree d=18
noisy data
x

Interpolation (Horners metod)

Man använder normalt Horners metod för detta. Exempel med $n = 4$.

$$x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 = x_1 + t(x_2 + t(x_3 + t x_4))$$

Detta skrivs lämpligen i en loop, men jag har använd sekvensiell kod: $p = x_4$, $p = x_3 + tp$, $p = x_2 + tp$, $p = x_1 + tp$. Detta kräver $n - 1$ + resp. *.

Man kan se Vandermonte-härledningen som ett specialfall av följande. Vi ansätter

$$p(t) = x_1 \phi_1(t) + x_2 \phi_2(t) + \ldots + x_{n-1} \phi_{n-1}(t) + x_n \phi_n(t)$$

ϕ_k kallas basfunktion och i Vandermonte-matrisen använder vi $\phi_k(t) = t^{k-1}$.

Ett problem med Vandermontematriser är att de kan bli illakonditionerade.

Interpolation (Horners metod)

Exempel

Antag $n = 4$ och tag t-värdena
$t_1 = 0.1 = 10^{-1}$, $t_2 = 0.2 = 2 \cdot 10^{-1}$, $t_3 = 0.3 = 3 \cdot 10^{-1}$ och
$t_4 = 0.4 = 4 \cdot 10^{-1}$. Matrisen kan då skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} \\ 1 & 2 \cdot 10^{-1} & 4 \cdot 10^{-2} & 8 \cdot 10^{-3} \\ 1 & 3 \cdot 10^{-1} & 9 \cdot 10^{-2} & 27 \cdot 10^{-3} \\ 1 & 4 \cdot 10^{-1} & 16 \cdot 10^{-2} & 64 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Konditionstalet är $\approx 2 \cdot 10^3$. Anledningen till det stora konditionstalet är att basfunktionerna liknar varandra (kolonnerna blir nästan linjärt beroende).

Ett sätt att få ner konditionstalet är att använda andra basfunktioner. Låt oss ta bokens förslag.

$$\phi_k(t) = \left(\frac{t - (t_1 + t_n)/2}{(t_n - t_1)/2} \right)^{k-1}$$

Den transformerade variabeln ligger i intervallet $[-1, 1]$:

$$-1 \leq \frac{t - (t_1 + t_n)/2}{(t_n - t_1)/2} \leq 1, \; t \in [t_1, t_n]$$

Denna transformation leder till det nya konditionstalet ≈ 8 i vårt exempel.

Interpolation (Newtons form)

Det finns ytterligare en vanlig framställning av interpolationspolynomet, nämligen Newtons form. Den är en kompromiss mellan de två tidigare. Det är relativt billigt både att konstruera polynomet och att sedan evaluera det.

Dessutom är det möjligt att lägga till nya punkter utan att börja om med polynomberäkningen.

Sats

Den allmänna Newtons formen är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + \ldots + x_n(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_{n-1})$$

Låt oss se på specialfallet $n = 3$.

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2).$$

Observera:

$$y_1 = p(t_1) = x_1 + x_2(t_1 - t_1) + x_3(t_1 - t_1)(t_1 - t_2) = x_1, \tag{8}$$
$$y_2 = p(t_2) = x_1 + x_2(t_2 - t_1) + x_3(t_2 - t_1)(t_2 - t_2) = x_1 + x_2(t_2 - t_1), \tag{9}$$
$$y_3 = p(t_3) = x_1 + x_2(t_3 - t_1) + x_3(t_3 - t_1)(t_3 - t_2). \tag{10}$$

Vi får det undertriangulära systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

som ju är enkelt att lösa (framåtsubstitution). Vi ser också att det går att lägga till en punkt (en rad underst i matrisen) och vi behöver inte lösa systemet från början.

Nu ett exempel där vi konstruerar polynomet med de tre metoderna.

Interpolation

Exempel

Finn p som interpolerar $(1,1),(2,4)$ samt $(3,11)$.

Lösning: $p(t)=[1,4,11]^T$, $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$.
1) Vandermontes form. Ansätt $p(t)=x_1+x_2t+x_3t^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow x=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Så $p(t)=2-3t+2t^2$ eller $p(t)=2t^2-3t+2$.

2) Langranges form:

$$p(t)=1\frac{(t-2)(t-3)}{(1-2)(1-3)}+4\frac{(t-1)(t-3)}{(2-1)(2-3)}+11\frac{(t-1)(t-2)}{(3-1)(3-2)}$$

Förenklar vi detta uttryck får vi (givetvis) $p(t)=2t^2-3t+2$.

Övning

Finn $p(t)$ i Vandermontes form som interpolerar funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 4$, i punkter: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$.
Notera: Vandermontes matris för 4 punkter:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{bmatrix}$$

Interpolation

Exempel (fortsättning)

Notera: $p(t) = [1, 4, 11]^T$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$.

3) Newtons form: $p(t) = x_1 + x_2(t-1) + x_3(t-1)(t-2)$.
Lös:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 1 & 3-1 & (3-1)(3-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

så att $x = [1, 3, 2]^T$ varför $p(t) = 1 + 3(t-1) + 2(t-1)(t-2)$
som också kan förenklas till $p(t) = 2t^2 - 3t + 2$.

Övning

Finn $p(t)$ i Newtons form som interpolerar funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 4$, i punkter: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$.
Notera: Newtons form:

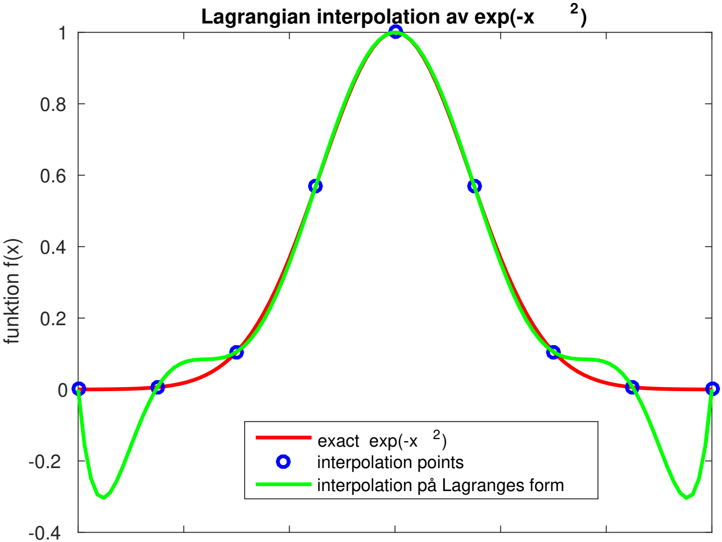
$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + x_4(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3).$$

För vissa funktioner kan interpolationsfelet bli stort i intervallets ändar (t.ex för $f(t) = e^{-t^2}$). Detta problem kan förvärras när antalet punkter ökar (Runges fenomen). p behöver inte alltid konvergera mot f, utan felet kan öka med ökande antal punkter.

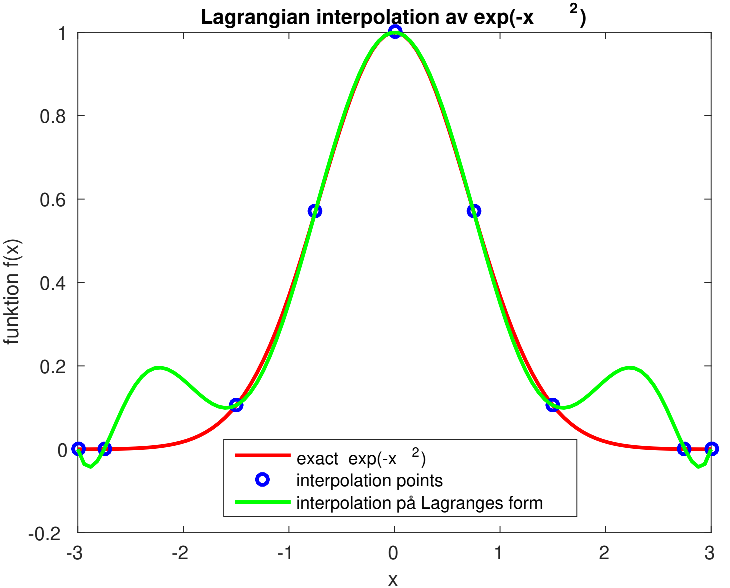
Det är inte ovanligt att polynom av högt gradtal svänger kraftigt när man använder ekvidistant interpolation (samma avstånd mellan t_k-värdena.

Vi kan försöka att "hålla nere" polynomet i ändarna genom att lägga punkterna tätare där. Då svänger polynomet mindre.

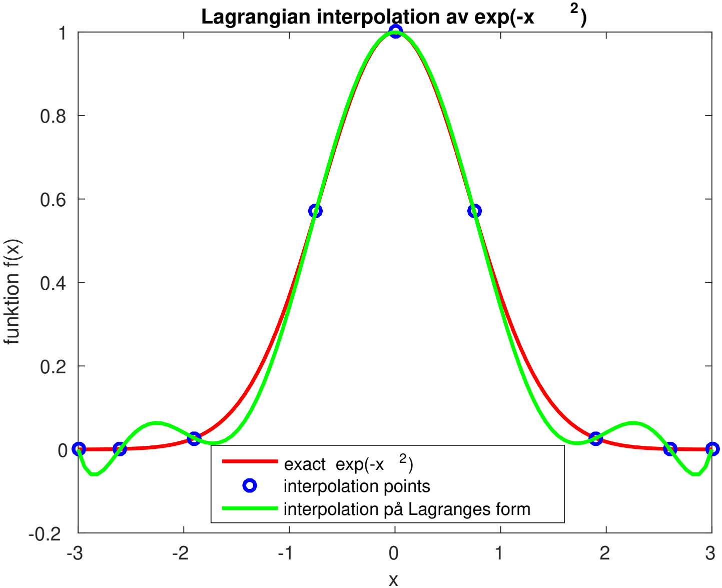
Lagrange interpolation i 9 ekvidistanta punkter för $f(x) = e^{-x^2}$



Interpolation i Lagrange form i 9 punkter för $f(x) = e^{-x^2}$



Interpolation i Lagrange form i 9 punkter för $f(x) = e^{-x^2}$



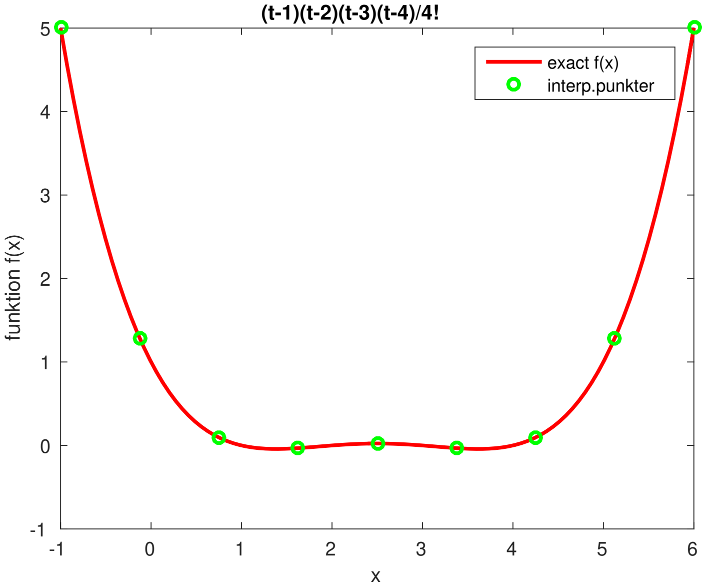
Vad är ett bra sätt att välja punkterna (om vi får välja)? Låt oss studera felets utseende igen (vi kan tänka oss exakta data, så att $p_f = p$).

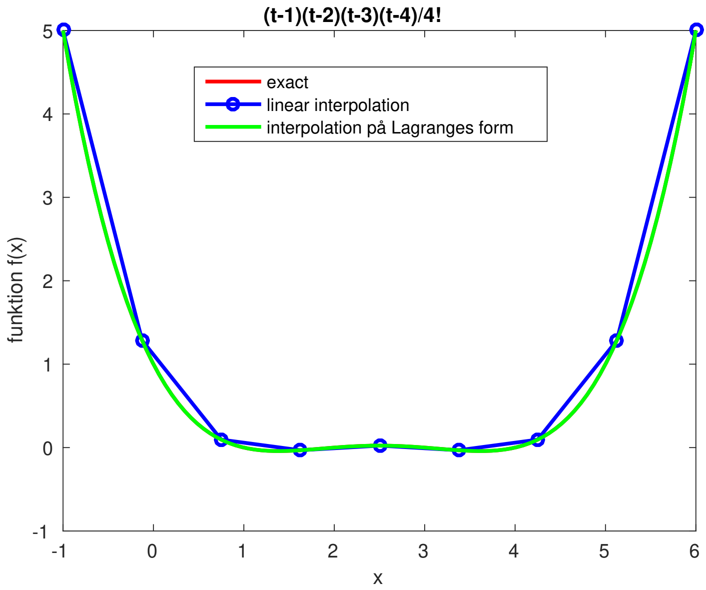
$$\underbrace{p(t)}_{beräknad} - \underbrace{f(t)}_{exakt} = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)$$

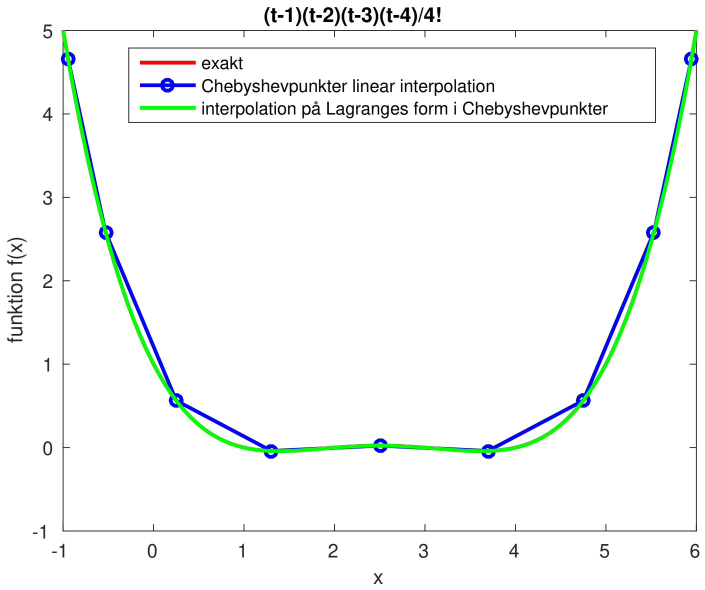
där $\theta \in (t, t_1, t_2, ..., t_n)$. Antag att $|f^{(n)}(\theta)| \leq M$ för alla $\theta \in (t_1, t_2, ..., t_n)$. Vi har då

$$|f(t) - p(t)| \leq \frac{M}{n!}|(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)|$$

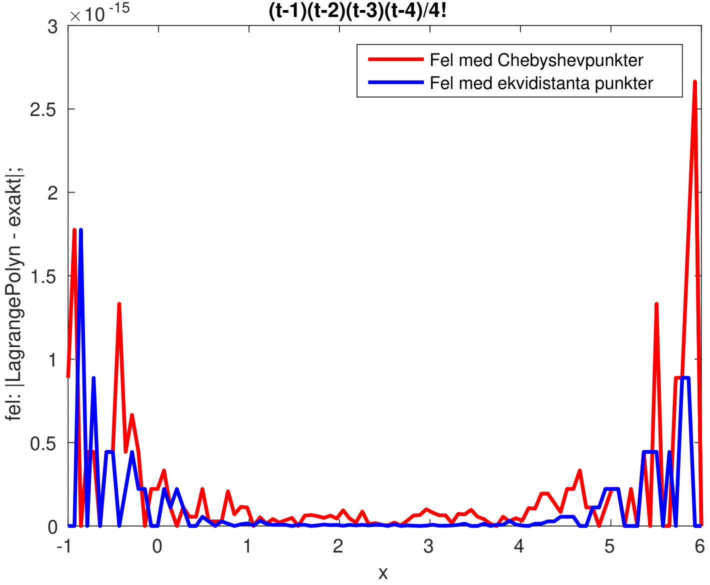
Låt oss specialstudera funktionen $(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)/n!$. Den växer snabbt utanför $[t_1, t_n]$. Extrapolation är farligt!

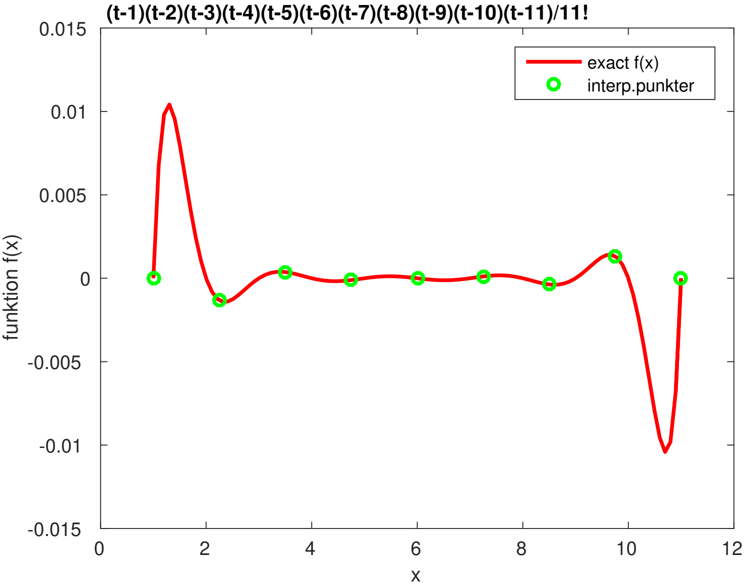

(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)/4!
exact f(x)
interp.punkter
funktion f(x)
x
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6

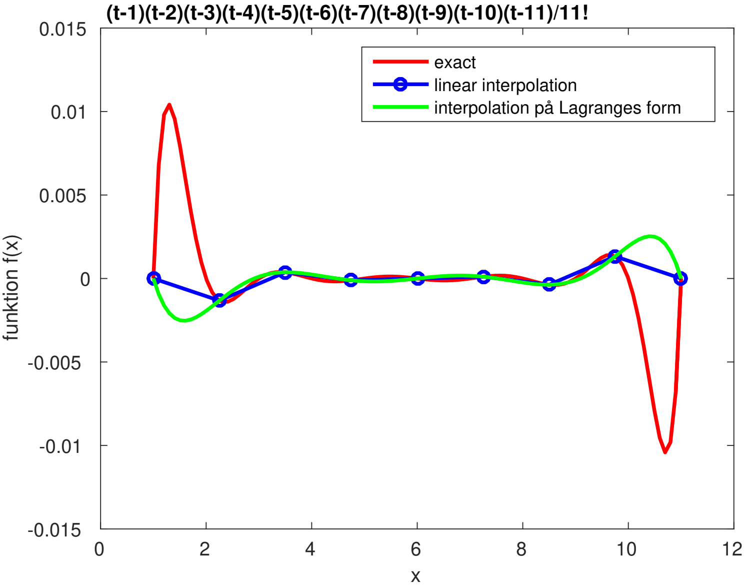

(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)/4!
exact
linear interpolation
interpolation på Lagranges form
funktion f(x)
x
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6

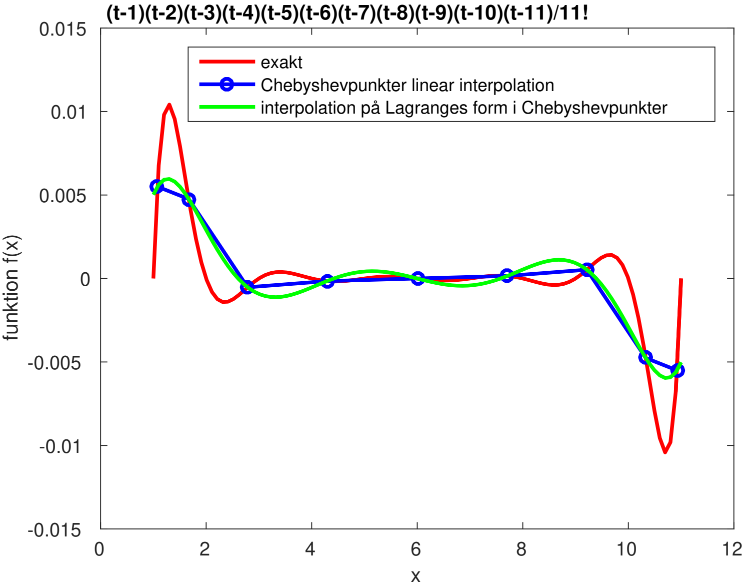


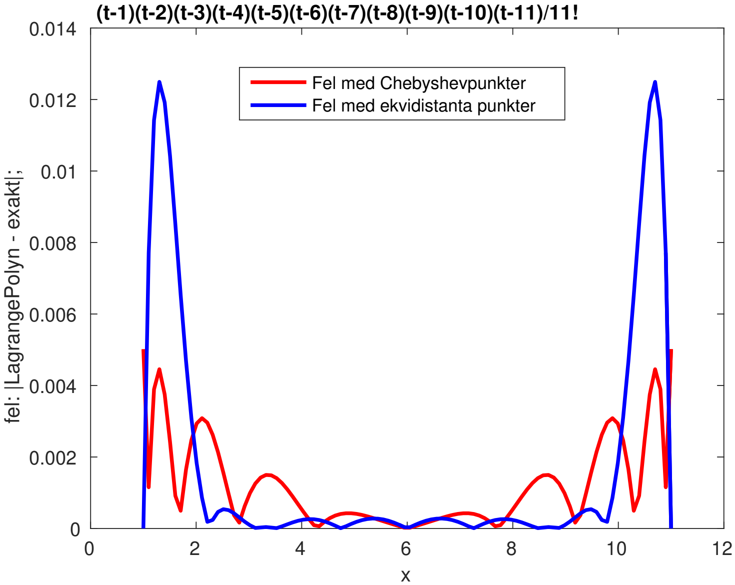
(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)/4!
exakt
Chebyshevpunkter linear interpolation
interpolation på Lagranges form i Chebyshevpunkter
funktion f(x)
x
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6

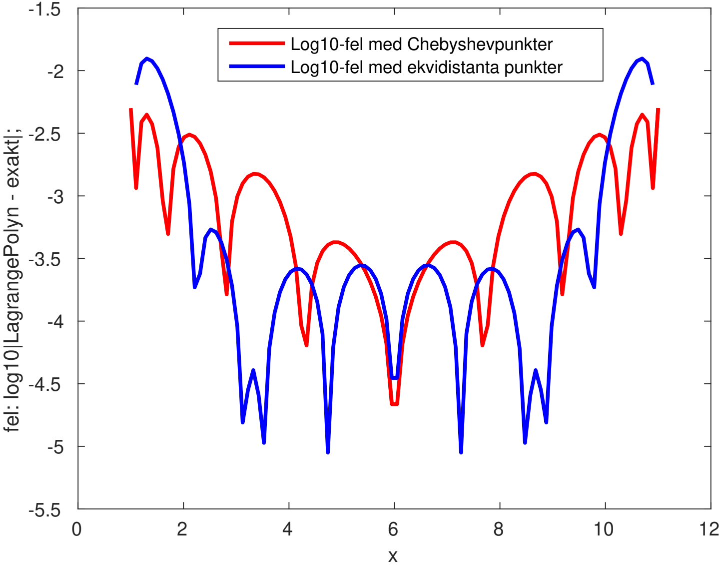

(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)/4!
×10^-15
fel: |LagrangePolyn - exakt|;
x
Fel med Chebyshevpunkter
Fel med ekvidistanta punkter
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
0
1
2
3
4
5
6


(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)(t-11)/11!
exact f(x)
interp.punkter
funktion f(x)
x
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
0
2
4
6
8
10
12


(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)(t-11)/11!
exact
linear interpolation
interpolation på Lagranges form
funktion f(x)
x
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
0
2
4
6
8
10
12


(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)(t-11)/11!
exakt
Chebyshevpunkter linear interpolation
interpolation på Lagranges form i Chebyshevpunkter
funktion f(x)
x
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
0
2
4
6
8
10
12


(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)(t-7)(t-8)(t-9)(t-10)(t-11)/11!
Fel med Chebyshevpunkter
Fel med ekvidistanta punkter
fel: |LagrangePolyn - exakt|;
x
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
2
4
6
8
10
12


Log10-fel med Chebyshevpunkter
Log10-fel med ekvidistanta punkter
fel: log10|LagrangePolyn - exakt|;
x
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
-5.5
0
2
4
6
8
10
12

Interpolation (Chebyshevpunkter)

De så kallande Chebyshevpunkterna har egenskapen att de gör det maximala värdet av $|(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)|$ så litet som möjligt.

Sats

Om $t_k, t \in [-1, 1],\ k = 1, 2, \dots, n$ *gäller det att*

$$\max_{-1 \le t \le 1} |(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)|$$

minimeras då

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],\ k = 1, 2, \dots, n$$

Det maximala värdet på $|(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n)|$ *är då* $1/2^{n-1}$.

Interpolation (Chebyshevpunkter)

När t ligger i ett annat intervall, $[\alpha, \beta]$ säg, får vi göra en linjär avbilding av Chebyshevpunkterna till detta intervall. Vi ser att

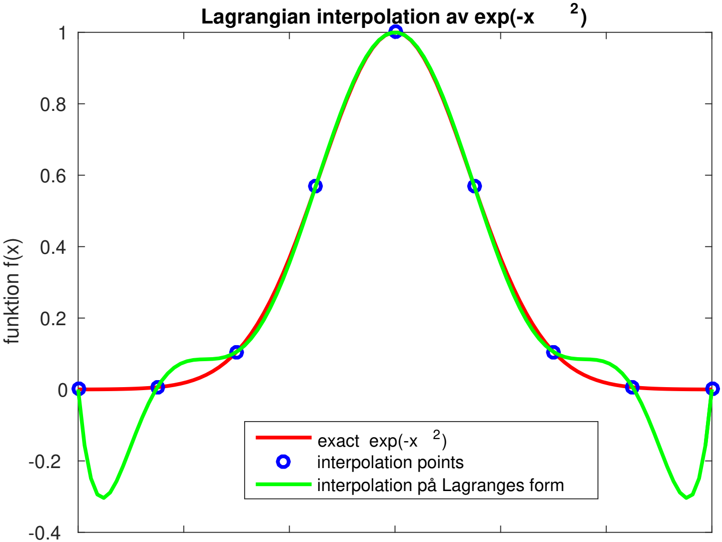
$$\frac{\beta - \alpha}{2}[-1, 1] + \frac{\alpha + \beta}{2} = [\alpha, \beta]$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna blir

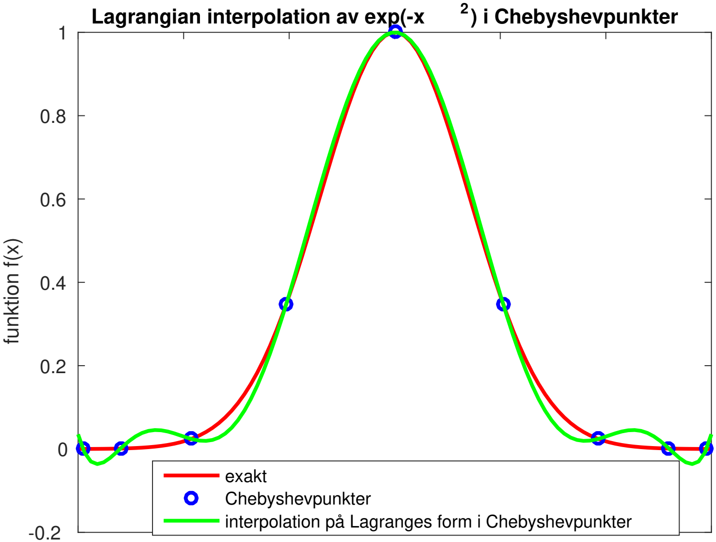
$$-\frac{\beta - \alpha}{2} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ibland är det ändå problem. Det kan tänkas att M, begränsningen av $|f^{(n)}(\theta)|$ ej existerar. Exempel: $f(t) = \sqrt{t}$ på intervallet $[0, 3]$. Redan $f'(0)$ är ju obegränsad, man säger att derivatan har en singularitet. I vissa fall visar sig singulariteten först i högre derivator (t.ex. $f(t) = t^{5/2}$).

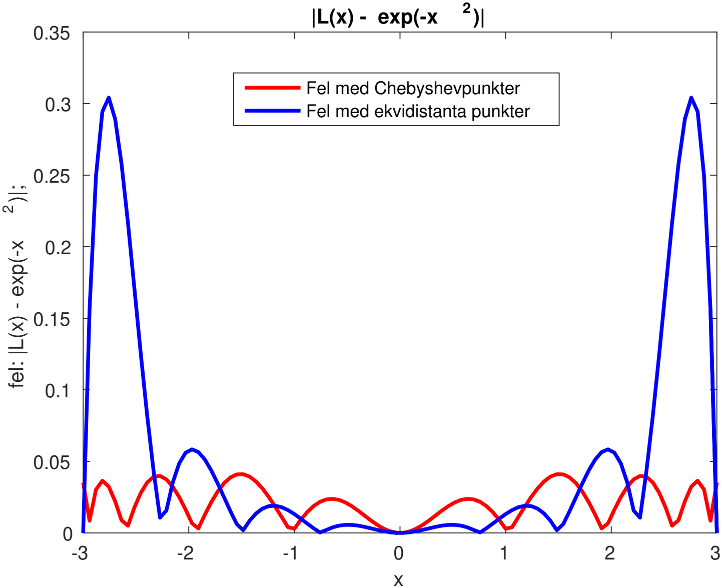
Lagrange interpolation i 9 ekvidistanta punkter för $f(x) = e^{-x^2}$



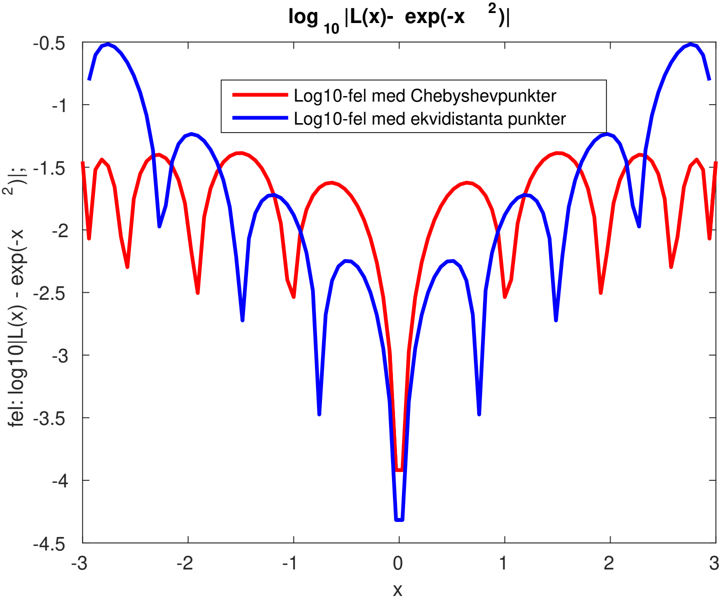
Interpolation i Lagrange form i 9 Chebyshevpunkter för $f(x) = e^{-x^2}$



Fel för $f(x) = e^{-x^2}$



Fel för $f(x) = e^{-x^2}$



Interpolation (Chebyshevpunkter)

Om en funktion har $n+1$ antal kontinuerliga derivator så kan den utvecklas i en Taylorutveckling:

$$f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + R(t)$$

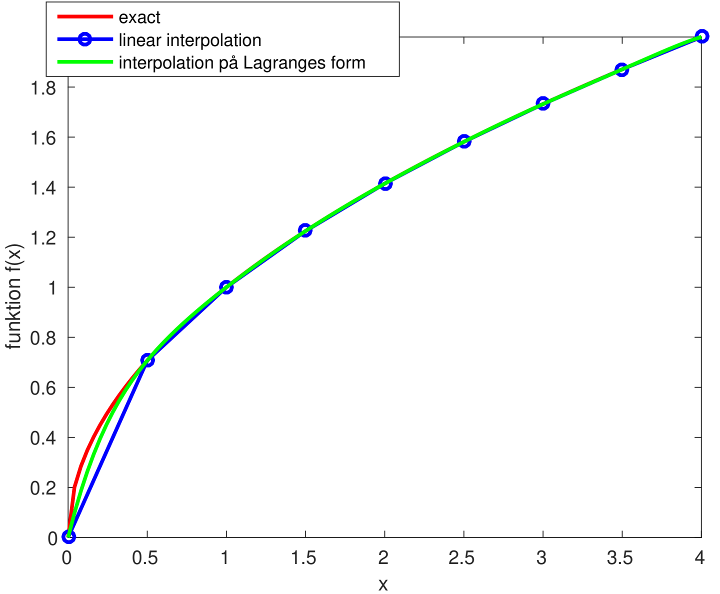
där resttermen $R(t) = c(\xi)(t-a)^{n+1}$, $\xi \in (a,t)$ och $|c(\xi)|$ är uppåt begränsad. Detta innebär att en sådan funktion (som har Taylorutveckling) liknar ett polynom på ett <u>tillräckligt litet</u> intervall.

Om inte alla $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$ kan vi göra $R(t)$ godtyckligt liten jämfört med resten av Taylorutveckningen, genom att ta $|t-a|$ tillräckligt litet. På ett stort intervall behöver inte funktionen likna ett polynom.

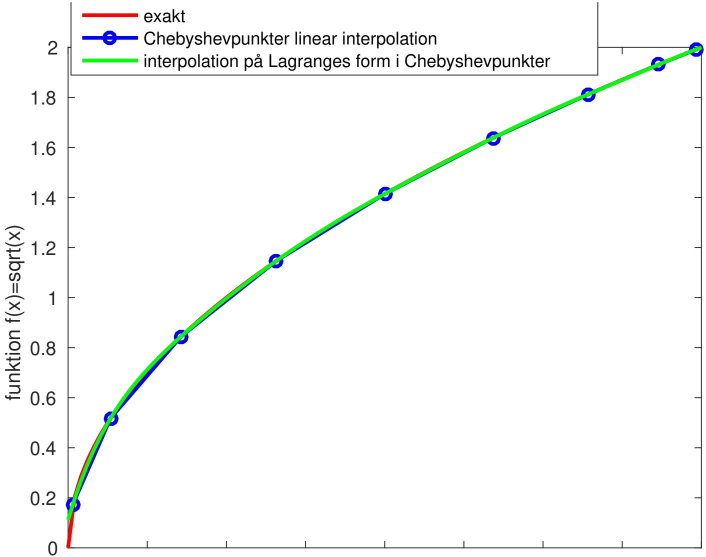
Example

$\sqrt{t}$ har ingen Taylorutveckling kring $a = 0$. Däremot har ju $\sqrt{t}$ en utveckling kring alla $a > 0$ och det är inga problem att approximera funktionen för positiva t.

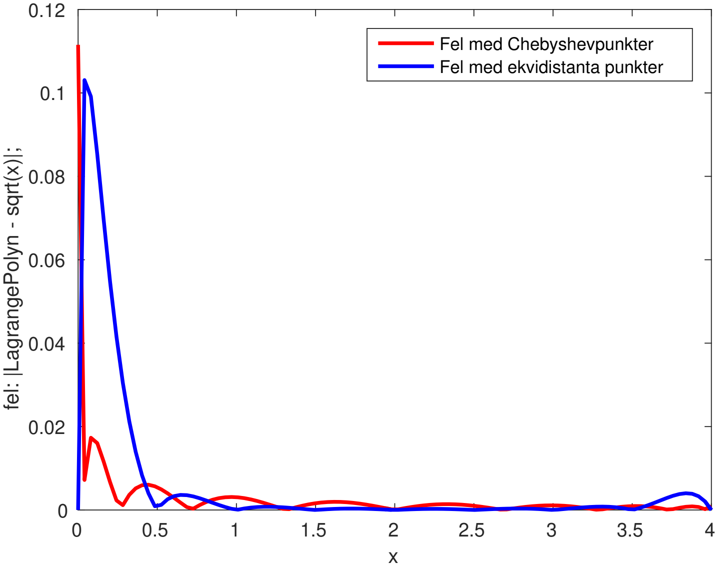
Interpolation i Lagrange form i 9 punkter för $f(x) = \sqrt{x}$



Interpolation i Lagrange form i 9 Chebyshevpunkter för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel av interpolation i Lagrange form för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel av interpolation i Lagrange form för $f(x) = \sqrt{x}$