Numerisk Analys, MMG410. Lecture 15.

Kvadratur - numerisk integration

Vill beräkna: $\int_a^b f(x)dx$. Inte alltid möjligt att uttrycka en primitiv funktion i elementära funktioner (inte alltid bekvämt eller). Grundidé: approximera $f(x)$ med en funktion $p(x)$ som har bra approximationsegenskaper och som är enkel att beräkna och integrera.

Enkelt exempel: vi vill approximera $\int_0^5 e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)dx$.
Facit: $\int_0^5 e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)dx \approx 0.1863$.

I Matlab finns den äldre adaptiva metoden `quadl` och den nyare `integral`.

```
fun = @(x) exp(-0.1*x.^2).*sin(5*x)
Q1 = quadl(fun,0.0, 5.0)
Q2 = integral(fun,0.0,5.0)
```

Kvadratur - numerisk integration

Metoderna bygger på två principer:

1. indelning av $[a, b]$ i intervall (inte alltid lika långa)
2. approximation av f med polynom på varje delintervall följd av integration av polynom

Man använder ofta adaptiva metoder som försöker anpassa längden på delintervallen så att det sammanlagda felet blir mindre än en given tolerans. Det är då vanligt att man har olika långa intervall och det är inte ovanligt att man har olika gradtal på polynomen. Som vi redan vet, i Matlab finns den äldre adaptiva metoden `quadl` och den nyare `integral`.

Newton-Cotes quadrature

Att integrera interpolationspolynom ger Newton-Cotes metoder. Man skiljer mellan öppna t Newton-Cotes metoder där ändpunkterna är med:

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n+1}, i = 1, ..., n.$$

resp. slutna t Newton-Cotes metoder där ändpunkterna ej tas med:

$$x_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{n-1}, i = 1, ..., n.$$

Vi ska studera:

- Rektangelmetoden eller mittpunktsmetoden: enklaste metoden är mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) där vi approximerar $f(x)$ med $f((x_k + x_{k+1})/2)$ i intervallet $[x_k, x_{k+1}]$.
- Trapetsmetoden: approximation av f med ett linjärt interpolationspolynom
- Simpson's metod: approximation av f med ett kvadratisk interpolationspolynom

Kvadratur (Trapetsmetoden)

Trapetsmetoden: approximation av f med ett linjärt interpolationspolynom (se förel. 13, linjärt interpolation i 2 punkter):

$$p(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

på varje delintervall (beräkna integralet):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

På intervallet $[a, b]$ approximerar vi integralen med arean av en parallelltrapets (därav namnet):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)),\ h = b-a$$

Vi delar nu in $[a, b]$ i $n-1$ lika långa delintervall (en del författare börjar med x_0):

$$x_k = a + (k-1)h,\ k = 1, ..., n,\ h = (b-a)/(n-1).$$

så att $x_1 = a$ och $x_n = b$.
Beteckna den approximation vi får med $T_n(f)$. Den blir:

$$\frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + f(x_3)) + ... + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] =$$

$$h\left[\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Övning

Använd trapetsmetoden för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.
Trapetsmetoden:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)), \; h = b - a$$

Övning

Använd trapetsmetoden för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.
Trapetsmetoden:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)),\ h=b-a$$

Trapetsmetoden för $\int_0^1 f(x)dx$ är:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(1)+f(0))\cdot(1-0).$$

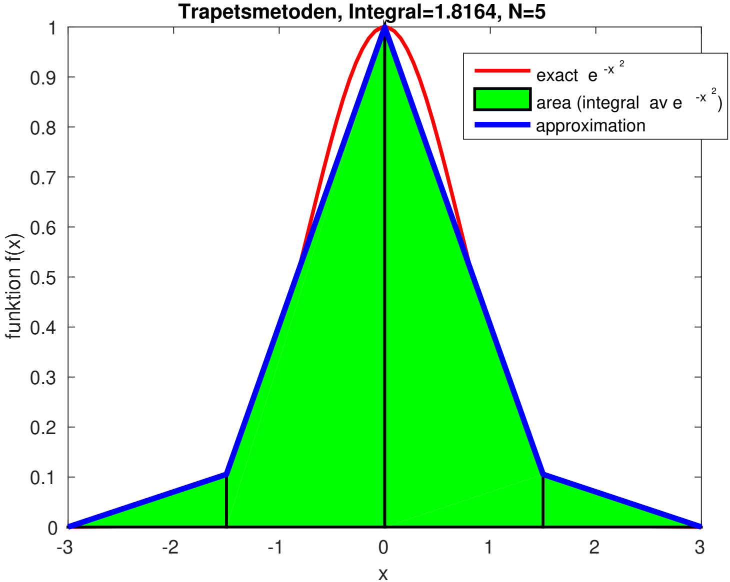
I vårt fall vi har $f(x)=x^2$, då trapetsmetoden för $\int_0^1 x^2 dx$ ger oss:

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(1^2+0^2)=\frac{1}{2}.$$

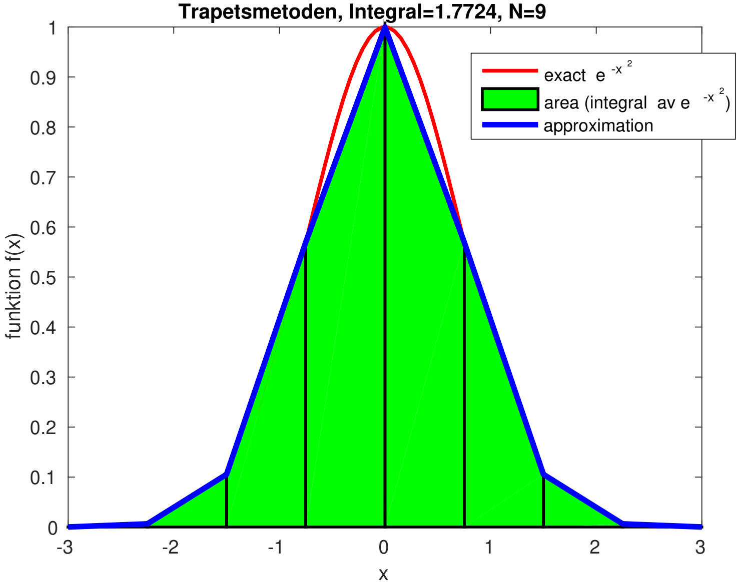
Trapetsmetoden i Matlab för $f(x) = e^{-x^2}$

```
fun = @(x) exp(-x.^2)

Q = integral(fun,-3.0,3.0);

N_calc = 11;
x_calc = linspace(-3.0, 3.0, N_calc);

for i = 1:N_calc
fun_calc(i) =fun(x_calc(i));
end
int_calc = trapz(x_calc, fun_calc);
```

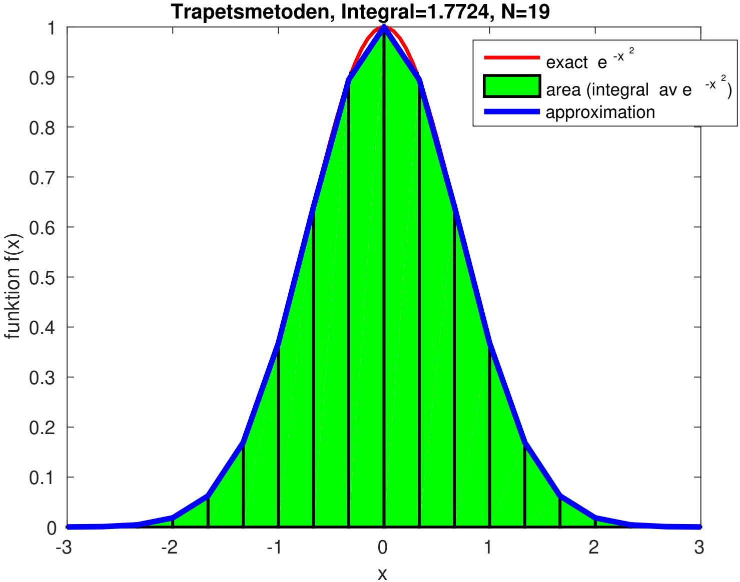
Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-x^2}$



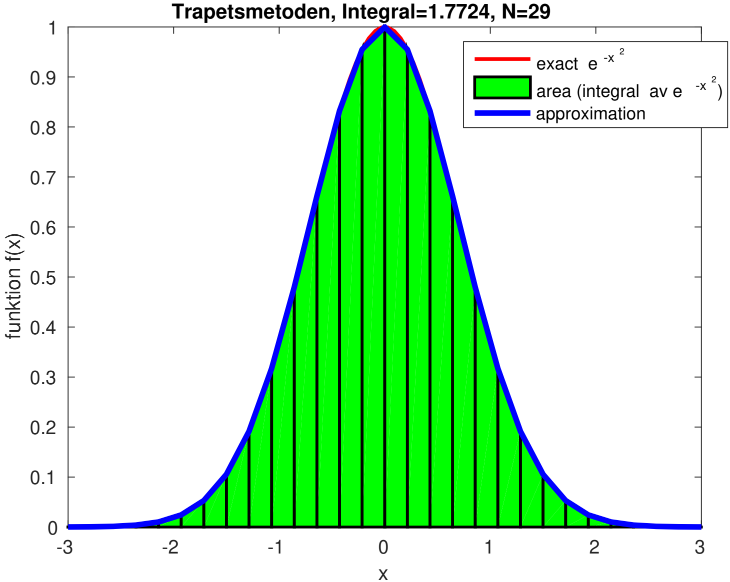
Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-x^2}$



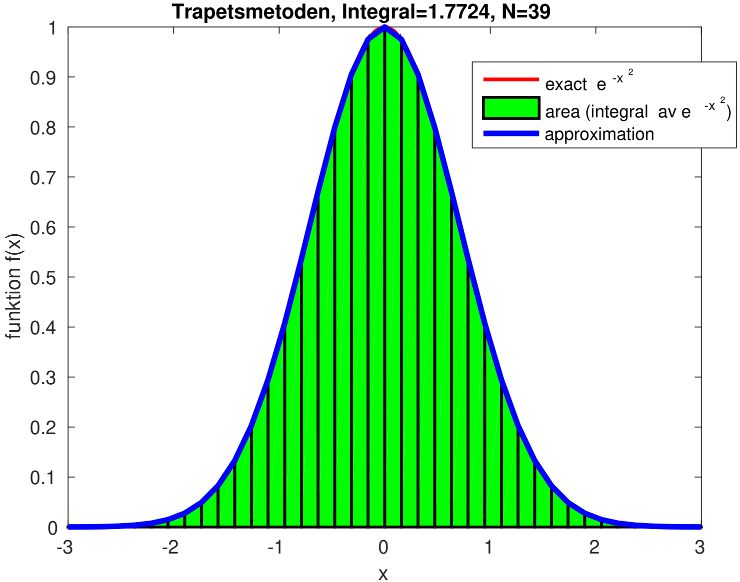
Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-x^2}$



Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-x^2}$



Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-x^2}$



Kvadratur (Trapetsmetoden)

Om man kör Trapetsmetoden på vårt första exempel för beräkning av $\int_0^5 e^{-0.1\cdot x^2}\sin(5x)dx$
med $n = 11, 21, 41, 81$ verkar felet ha utseendet ch^2 när $h \to 0, c = const.$. Kan man bevisa att felet har utseendet ch^2?

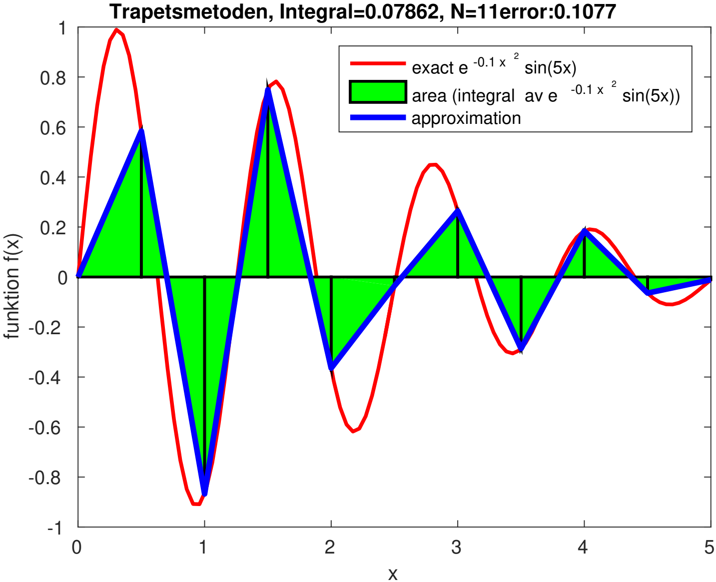
l	N	Fel e_l	e_l/e_{l+1}	q	h	h^2
1	11	0.1077			0.5	0.25
2	21	0.0245	4.3959	2.1362	0.25	0.0625
3	41	0.0060	4.0833	2.0297	0.125	0.0156
4	81	0.0015	4.0000	2	0.0625	0.0039

Ordningsfelet q:

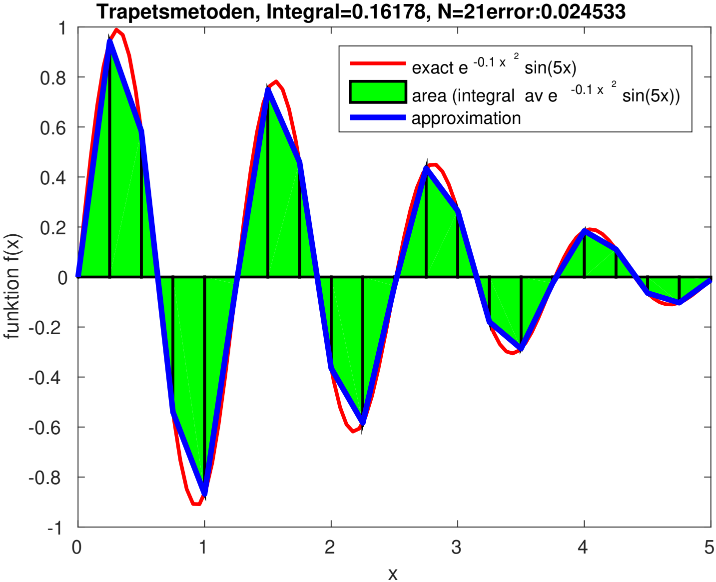
$$q = \frac{\log\left(\frac{e_{l+1}}{e_l}\right)}{\log(0.5)} \approx \frac{log(0.5^k)}{\log(0.5)} = \frac{klog(0.5)}{\log(0.5)} \approx k,$$

eftersom $\log\left(\frac{e_{l+1}}{e_l}\right) = \log\left(\frac{e_h}{e_{2h}}\right) = \log\left(\frac{Ch^k}{C(2h)^k}\right) \approx \log(0.5^k)$ för fel $e_h \approx Ch^k, e_{2h} \approx C(2h)^k$.

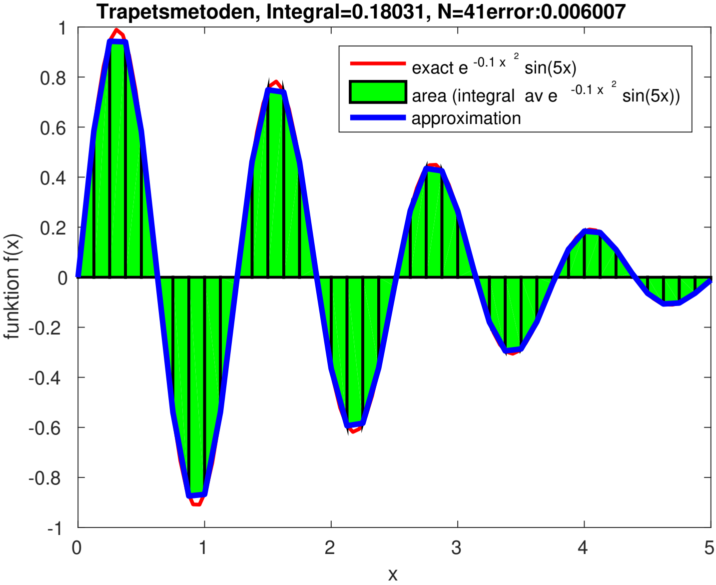
Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)$



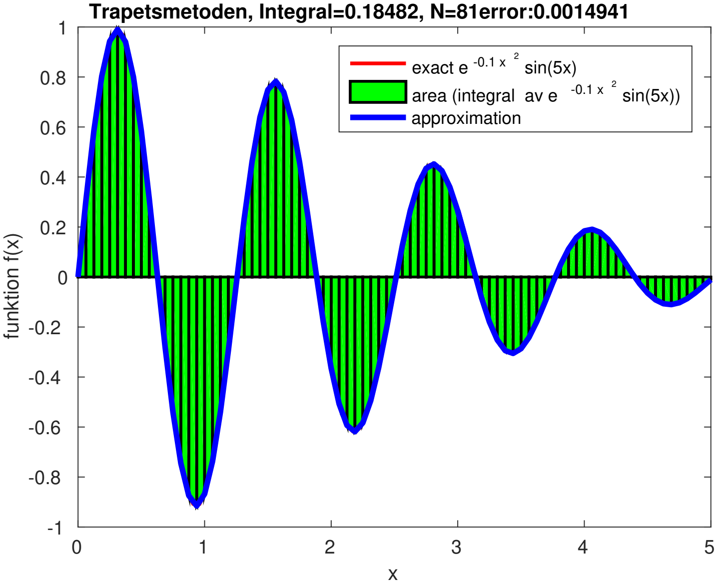
Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)$



Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)$



Trapetsmetoden för $f(x) = e^{-0.1 \cdot x^2} \sin(5x)$



Kvadratur (Trapetsmetoden)

Från interpolationsteorin vet vi att:

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b),\ \xi \in (a,b)$$

med <u>ett</u> intervall. Alltså

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)dx =$$
$$\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{12},\ \xi \in (a,b).$$

Detta följer av integralkalkylens medelvärdessats ($(x-a)(x-b)$ byter inte tecken på $[a,b]$).

Fel

I det allmänna fallet, med $n-1$ delintervall får vi summera felen:

$$\int_a^b f(x)dx - T_n(f) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^3 f''(\xi_k)}{12} = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k)$$

Om vi antar att f'' är kontinuerlig så antar f'' min/max på $[a,b]$ så att

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k) \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

så att (en kontinuerlig funktion antar alla mellanliggande värden):

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f''(\xi_k) = f''(\xi) \quad (\text{nytt } \xi)$$

Alltså:

$$\int_a^b f(x)dx - T_n(f) = -\frac{h^3(n-1)f''(\xi)}{12} = -\frac{(b-a)h^2 f''(\xi)}{12},\ \xi \in [a,b]$$

ty $h(n-1) = b-a$.

Kvadratur (Trapetsmetoden)

Så om andraderivatan är begränsad i $[a, b]$ och om vi räknar exakt gäller att $T_n(f) \to \int_a^b f(x)dx, \; n \to \infty$.

Observera att om man inte vet något om hur f'' ser ut kan man inte garantera konvergens.
Det är enkelt att lura avbrottskriteriet i kvadraturprogram. Det enda vi känner till är ju $(x_k, f(x_k)), \; k = 1, ..., n$ men det finns oändligt många funktioner som interpolerar dessa punkter (med olika värden på integralen).
Detta är ett allmänt beräkningsproblem (ändliga punktmändger från oändliga punktmängder).

Mittpunktsmetoden (rektangelmetoden)

Enklaste metoden är mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) där vi approximerar $f(x)$ med $f((x_k + x_{k+1})/2)$ i intervallet $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Så om vi bara ser på intervallet $[a, b]$ så har vi approximationen:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Vi delar nu in $[a, b]$ i $n-1$ lika långa delintervall:

$$x_k = a + (k-1)h,\ k = 1, ..., n,\ h = (b-a)/(n-1).$$

så att $x_1 = a$ och $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[f((x_1+x_2)/2)+f((x_2+x_3)/2)+...+f((x_{n-1}+x_n)/2)]$$

Fel i rektangelmetoden

Integralkalkylens medelvärdessats:

$$f'(x) \in C[a, b] \to f(x) \approx f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}).$$

Vi ska använda den för att räkna fel för $\hat{x} = x_{i-1}, i = 1, ..., n$:

$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i \right|$ för $\hat{x} = x_{i-1}$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx \approx f(\hat{x}_i)h_i,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i \right| &\approx \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\hat{x}_i) + f'(\hat{x}_i)(x - \hat{x}_i)]\ dx - f(\hat{x}_i)h_i \right| \\ &\leq \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f'(\hat{x}_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - \hat{x}_i)\ dx = \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f'(\hat{x}_i)| \frac{h_i^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Summerar alla intervaler $I_i, i = 1, ..., n$ för att få felen i allmänna fallet:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i \leq 1/2 \sum_{i=1}^{n-1} \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f'(\hat{x}_i)| h_i^2. \tag{2}$$

Fel i mittpunktsmetoden

Taylor's formel:

$$f''(x) \in C[a,b] \to f(x) \approx f(\hat{x}_i) + f'(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i) + f''(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i)^2/2,$$
$$\hat{x}_i \in [x_{i-1}, x_i] : \hat{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}. \tag{3}$$

Vi ska använda den för att räkna fel $\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i\right|$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx \approx f(\hat{x}_i)h_i; \quad \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i\right|$$
$$\approx \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\hat{x}_i) + f'(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i) + f''(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i)^2/2]\ dx - f(\hat{x}_i)h_i\right| =$$
$$\left|\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\hat{x}_i)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i}_{=0} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i)^2/2\ dx + \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\hat{x}_i)(x-\hat{x}_i)\ dx}_{=0}\right|. \tag{4}$$

Fel i mittpunktsmetoden

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i\right| \leq \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f''(\hat{x}_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-\hat{x}_i)^2/2\ dx$$
$$\leq 1/2 \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f''(\hat{x}_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-\hat{x}_i)^2\ dx = 1/2 \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f''(\hat{x}_i)| \frac{2h_i^3}{24} \qquad (5)$$
$$= \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f''(\hat{x}_i)| \frac{h_i^3}{24}.$$

Summerar fel för alla intervaler $I_i, i = 1, ..., n-1$ på intervalet $[a, b]$ för att få felen i allmänna fallet:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(\hat{x}_i)h_i\right|$$
$$\leq 1/24 \sum_{i=1}^{n-1} \max_{\hat{x}_i \in I_i} |f''(\hat{x}_i)| h_i h_i^2 = \frac{(b-a)|f''(\xi)|h^2}{24}, \quad \xi \in [a, b]. \qquad (6)$$

var $b - a = h(n-1)$ för $h = h_i, i = 1, ..., n-1$.

Kvadratur (Newton-Cotes-kvadratur)

Felet för den sammansatta mittpunktsmetoden har utseendet:

$$(b-a)h^2 f''(\xi)/24$$

vilket lustigt nog är mindre än för trapetsmetoden.
Dessutom har både mittpunkts- och trapetsmetod polynomiellt gradtal ett (exakt för alla polynom upp till och med grad ett). Detta beror på att vi inte primärt är intresserade av att approximera f (då är normalt en allmän linjär funktion bättre än en konstant) utan att vi vill approximera en integral.

Example

En linjär approximation av t.ex. $f(x) = x$ över $[-1, 1]$ ger felet noll och en exakt integral. Approximation av samma funktion med $f(0) = 0$ ger stora fel i funktionsanpassningen men en exakt integral pga. att approximationsfelen i integralen precis tar ut varandra.

Övning

Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för att beräkna integralen $\int_0^1 4x^3 dx$.
Rektangelmetoden:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Övning

Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för att beräkna integralen $\int_0^1 4x^3 dx$.
Svar:
Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall vi har $f(x) = 4x^3$, då rektangelmetoden för $\int_0^1 4x^3 dx$ ger oss:

$$\int_0^1 4x^3 dx \approx (1-0)f\left(\frac{1+0}{2}\right) = f(1/2) = 4 \cdot (1/2)^3 = 1/2.$$

Simpson's metod

Vi har tittat på trapetsmetoden där man använder en linjär approximation. Använder man en kvadratisk approximation - interpolationspolynomet på Lagranges form med $t_1 = a, t_2 = m = (a+b)/2, t_3 = b$:

$$P(t) = f(a)\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + f(m)\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + f(b)\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

eller med $t = x$ och $t_1 = a, t_2 = m = (a+b)/2, t_3 = b$:

$$P(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

får man Simpsons formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Kvadratur (Newton-Cotes-kvadratur)

Simpsons formel, som också har ett udda antar punkter (jämn grad på polynomet) har felet $(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)/180$ som också uppvisar mindre fel än först förväntat (tre punkter ger h^4 och $f^{(4)}$).

En allmän kvadraturmetod kan skrivas

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

där w_k kallas vikter och x_k abscissor.
Hur ser Simpsons formel ut på mer än ett intervall? Dela in $[a, b]$ i sex lika långa delintervall där vi använder metoden på $[x_1, x_3]$, $[x_3, x_5]$ och $[x_5, x_7]$.

Kvadratur (Newton-Cotes-kvadratur)

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx + \int_{x_5}^{x_7} f(x)dx \approx$$

$$\frac{x_3 - x_1}{6}\left[f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) + f(x_3)\right] +$$

$$\frac{x_5 - x_3}{6}\left[f(x_3) + 4f\left(\frac{x_3 + x_5}{2}\right) + f(x_5)\right] +$$

$$\frac{x_7 - x_5}{6}\left[f(x_5) + 4f\left(\frac{x_5 + x_7}{2}\right) + f(x_7)\right].$$

$\frac{x_1+x_3}{2} = x_2$ etc. och $h = x_{k+1} - x_k$ så approximationen blir:

$$\frac{2h}{6}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5) + 4f(x_6) + f(x_7)]$$

eftersom ändpunkterna i delintervallen sammanfaller parvis. Med $f(x) = e^{-x^2}$ och ett absolut fel $\leq 1.2 \cdot 10^{-9}$ tar trapetsmetoden 7150 funktionsevalueringar, mittpunktsmetoden 5055 och Simpsons formel 52. Matlabs `quadl`, som är adaptiv, tar 18 (`integral` tycks alltid börja med 150, felet blir 10^{-16}).

Simpson's formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Composite Simpon's formel:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{n/2}[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right], \qquad (7)\end{aligned}$$

$x_j = a + jh, j = 0, ..., n, h = (b-a)/n.$

Fel i composite Simpson's formel är:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{(b-a)h^4}{180}\max_{\xi\in[a,b]} f^{(4)}(\xi). \qquad (8)$$

Example

Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för att beräkna integralen $\int_{-1}^{1} x dx$.
Svar:
Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall vi har $f(x) = x$, då rektangelmetoden ger oss:

$$\int_{-1}^{1} x dx \approx (1-(-1))f\left(\frac{-1+1}{2}\right) = 2 \cdot f(0) = 0.$$

Observera, att exakt integral är:

$$\int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Övning

Använd Simpsons metod för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.
Simpsons metod :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Övning

Använd Simpsons metod för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.
Simpsons metod :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Vi har: $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, f(a) = a^2, f(0) = 0, f(b) = f(1) = 1^2 = 1, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f((0+1)/2) = f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4.$

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1-0}{6}[0 + 4 \cdot 1/4 + 1] = 1/3.$$

Kvadratur (Newton-Cotes-kvadratur)

Det spelar stor roll vilken metod man använder och h^m-faktorn är viktig. Låt oss anta att vi har en uppsättning metoder med feltermer(c konstant, m heltal och $h = 1/(n-1)$)

$$c(b-a)h^m f^{(m)}(\xi)$$

Om $f^{(m)}(\xi)$ är konstant kan felet skrivas Ch^m, C konstant. För att feltermen skall bli $\approx \tau$ en given tolerans, krävs alltså:

$$Ch^m \approx \tau, \quad n \approx \frac{1}{(\tau/C)^{1/m}}, \ n \propto \frac{1}{\tau^{1/m}}$$

Med $\tau = 10^{-9}$ och $C = 1$ så får vi denna tabell:

m	$\propto n$
2	31623
3	1000
4	178
5	63
6	32
7	19

Numerisk integration av data i Matlab

Vi vet hastighet $V(m/sec)$ av en bil i discreta tidspunkter $t_k(sec)$ i tiden $[0, T]$. Vi vill approximera distansen $S(m)$, som bilen har kört under tiden.

Distansen S räknas som $S = V \cdot t$ eller med hjälp av trapetsmetoden :

$$S = \int_0^T V dt \approx \sum_{k=1}^{N-1} \tau \frac{V(t_k) + V(t_{k+1})}{2}$$

och

$\tau = T/(N-1)$ för N diskr.punkter t_k.

Numerisk integration av data i Matlab

```
x_calc = 0:24;
N_calc = size(x_calc,2);
data = [0.0 5 11 16 21 40 ...
40 40 40 40 40 40 40 40 40 30 30 21 17 14 11 ...
8 6 2 0];
int_calc = trapz(x_calc, data);
figure
xvert = [x_calc(1:end-1);x_calc(1:end-1);x_calc(2:end);
...
x_calc(2:end)];
yvert = [zeros(1,N_calc-1);data(1:end-1);data(2:end);...

zeros(1,N_calc-1)];
patch(xvert, yvert,'g','LineWidth',1.5)
hold on
plot(x_calc, data, ' r- o', 'LineWidth',2)
```

Numerisk integration av data i Matlab