Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-06-07, SB

- Skrivtid: 14.00-18.00.
- Ansvarig: Larisa Beilina, tel 772 35 67, e-post: larisa@chalmers.se.
- Vakt: Andreas Petersson, tel. 772 53 25.
- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 25, räcker för godkänt, 18 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: inga (förutom godkända ordlistor/formelblad (1 sida på A4 lappen)).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Antag att $A = LL^T$ där L är ickesingulär. Visa att A är symmetrisk och positivt definit.
  (1p)
- b) Skriv talet 9 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$ är diagonalmatris med alla $d_i \neq 0$. Beräkna konditionstalet $\kappa_p(D)$ i ettnormen ($p = 1$), maxnormen ($p = \infty$) och tvånormen ($p = 2$).
  (3p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis för att vi får linjär konvergens för fixpunktsiteration om $g'(x^*) \neq 0$.
  (2p)

2.
Vi vill hitta ett lokalt minimum till den reellvärda funktion $f(x, y, z)$, x, y, z är reella variabler. Vi kan försöka hitta minimum där tre partiella derivatorna av funktionen $f(x, y, z)$ är noll. Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system när $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \cos(x + y + z)$. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Vi känner y_1, y_2 som är approximationer av $f(x)$ i två punkter x_1, x_2 så att $x_1 < x_2$. Bestäm ett linjära interpolationspolynomet $p(x)$ för x i $x_1 < x < x_2$, som uppfyller interpollationsvillkoren: $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2$.
(**2p**)

4.

- a) Vi har en kvadraturformel
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$
för lämpliga punkterna $x_1, ..., x_n$ och vikterna $w_1, ..., w_n$. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[5, 10]$?
(**2p**)
- b) Vi vill bestämma den interpolerande splinefunktionen av grad 2 som interpolerar i punkterna $(1, 1)$, $(3, 5)$ och $(5, 7)$. Skriv ut alla villkor för splinefunktionen av grad 2 i punkterna $(1, 1)$, $(3, 5)$ och $(5, 7)$ för att bestämma koefficienterna i interpolanten.
(**2p**)

5.

- a) Skriv om följande ekvation som första ordningens system:
$$\begin{cases} y''(t) & = t^2 + y(t)y'(t) + y'(t), \\ y(-1) & = 5, \\ y'(-1) & = 10. \end{cases}$$
(**2p**)
- b) Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet
$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) + 2t, \\ x'(t) = \cos(y(t)) - 2tx(t), \\ y(0) = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$
(**2p**)

---

6. Vi har en matematisk modell där y är kopplat till x på följande sätt:
$$\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{x^2}{d^2} = 1, \quad a > 0, d > 0.$$
där a, d och c är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna a, d och c givet mätvärden $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m), y_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x. Kan detta sista steg orsaka några problem? (**3p**)