Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-08-21, SB

- Skrivtid: 14.00-18.00.
- Ansvarig: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036, e-post: larisa@chalmers.se.
- Vakt: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036
- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 25, räcker för godkänt, 18 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: inga (förutom godkända ordlistor/formelblad (1 sida på A4 lappen)).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Visa att matrisen nedan saknar LU-faktoriseringen:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(1p)
- b) Skriv talet -20 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt matrisen A vara symmetrisk och positivt definit. Visa att $\|x\|_A = (x^T Ax)^{1/2}$ definierar en vektornorm.
(3p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Använd Taylors formel för $g(x^k)$ och ge en bevis för att vi får kvadratisk konvergens för fixpunktsiteration om $g'(x^*) = 0$. Här, x^* är fixpunkt.
(3p)

2.
Vi vill hitta en funktion på formen
$$f(x) = ax + \mathrm{e}^{bx} + \sin(cx)$$
som satisfierar följande villkor: $f(1) = 5, f'(1) = 1, f''(2) = 10$ (a, b och c skall alltså bestämmas). Ställ upp ett system av ekvationer för problemet, och formulera sedan New-

---

3. Vi vill bestämma den interpolerande splinefunktionen av grad 3 som interpolerar i punkterna (t_1, y_1), (t_2, y_2) och (t_3, y_3). Skriv ut alla villkor för splinefunktionen av grad 3 i punkterna (t_1, y_1), (t_2, y_2) och (t_3, y_3) för att bestämma koefficienterna i interpolanten.
(2p)

4.

- a) Vi har en kvadraturformel $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$. Hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[7, 10]$?
  (2p)
- b) Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) i två punkter 0 och π för att beräkna integralen $\int_0^{\pi} \sin x\ dx$.
  (1p)

5.

- a) Skriv om följande problem på standardform och sedan som första ordningens system:

$$\begin{cases} t^2 v''(t) &= t^3 + v(t)v'(t) + z'(t)z(t) + (w(t))^3, \\ \frac{z''(t)}{v(t)} &= z(t) + \frac{v'(t)+t}{v(t)} - w(t), \\ w'(t) &= 5v(t)z'(t) + w(t) + t, \\ v(-1) &= -0.1, \\ v'(-1) &= -0.1, \\ z(-1) &= -0.1, \\ z'(-1) &= -0.2, \\ w(-1) &= 0.5. \end{cases}$$

  (2p)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t), \\ x(1) = 5. \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

  (2p)

---

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx 5^{\frac{\alpha}{\beta}} \exp^{\alpha t - \frac{\gamma}{\alpha} t^2}$$

där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(3p)