Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-06-07

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Antag att $A = LL^T$ där L är ickesingulär. Visa att A är symmetrisk och positivt definit.
  (1p)
- b) Skriv talet 9 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$ är diagonalmatris med alla $d_i \neq 0$. Beräkna konditionstalet $\kappa_p(D)$ i ettnormen ($p = 1$), maxnormen ($p = \infty$) och tvånormen ($p = 2$).
  (3p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis för att vi får linjär konvergens för fixpunktsiteration om $g'(x^*) \neq 0$.
  (2p)

2.

Vi vill hitta ett lokalt minimum till den reellvärda funktion $f(x, y, z)$, x, y, z är reella variabler. Vi kan försöka hitta minimum där tre partiella derivatorna av funktionen $f(x, y, z)$ är noll.

Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system när $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \cos(x + y + z)$. Försök inte att lösa systemet för hand.

(3p)

---

3. Vi känner y_1, y_2 som är approximationer av $f(x)$ i två punkter x_1, x_2 så att $x_1 < x_2$. Bestäm ett linjära interpolationspolynomet $p(x)$ för x i $x_1 < x < x_2$, som uppfyller interpollationsvillkoren: $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2$.

(**2p**)

4.

- a) Vi har en kvadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

för lämpliga punkterna $x_1, ..., x_n$ och vikterna $w_1, ..., w_n$. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[5, 10]$?
(**2p**)

- b) Vi vill bestämma den interpolerande splinefunktionen av grad 2 som interpolerar i punkterna $(1, 1)$, $(3, 5)$ och $(5, 7)$. Skriv ut alla villkor för splinefunktionen av grad 2 i punkterna $(1, 1)$, $(3, 5)$ och $(5, 7)$ för att bestämma koefficienterna i interpolanten.
(**2p**)

5.

- a) Skriv om följande ekvation som första ordningens system:

$$\begin{cases} y''(t) & = t^2 + y(t)y'(t) + y'(t), \\ y(-1) & = 5, \\ y'(-1) & = 10. \end{cases}$$

(**2p**)

- b) Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) + 2t, \\ x'(t) = \cos(y(t)) - 2tx(t), \\ y(0) = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(**2p**)

---

6. Vi har en matematisk modell där y är kopplat till x på följande sätt:

$$\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{x^2}{d^2} = 1, \quad a > 0, d > 0.$$

där a, d och c är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna a, d och c givet mätvärden $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m), y_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x. Kan detta sista steg orsaka några problem?
(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-06-07

1.

- a)
  Symmetrisk: $A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A$.

  Positivt definit: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T LL^T\mathbf{x} = (L^T\mathbf{x})^T L^T\mathbf{x} = \|L^T\mathbf{x}\|_2^2 > 0$ om $\mathbf{x} \neq 0$.
- b) Vi kan skriva talet 9 som $9 = [1 + 0.125] \cdot 2^3$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 3 så här: $3 + 1023 = 1026 = 1024 + 2 = 2^{10} + 2^1$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.125 = 0 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/8$. Vi får följande binär representation för 9:

$$|0|\underbrace{10000000010}_{exponenten}|\quad\underbrace{00100....0}_{mantissa\ 52\ bitar}\quad|$$

  där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar kodas som 10000000010 och mantissa 52 bitar kodas som 001000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$0100 \quad 0000 \quad 0010 \quad 0010 \quad .... \quad 0000$$

  och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 0100 &= 4,\\ 0000 &= 0,\\ 0010 &= 2,\\ 0010 &= 2,\\ 0000 &= 0,\\ &\dots \end{aligned}$$

  Hexadecimalt (bas 16) format för 9 är:

$$4022000000000000.$$

- c) $D^{-1} = \mathrm{diag}(1/d_1, ..., 1/d_n)$. För en diagonalmatris gäller $\|D\| = \max_k |d_k|$ (för alla tre normer $p = 1, \infty, 2$ i $\kappa_p(D)$). Så $\kappa_p(D) = \|D\|_p \|D^{-1}\|_p = \max |d_k| \max |1/d_k| = \max |d_k| / \min |d_k|, p = 1, \infty, 2$.
- d) Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* = g(x_k) - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(\Theta_k)(x_k - x^*)\right) - x^* \\ &= \underbrace{g'(\Theta_k)}_{\neq 0}(x_k - x^*), \quad \Theta_k \in (x^*, x_k) \end{aligned}$$

  så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = |g'(\Theta_k|.$$

Om g är tillräckligt snäll kommer $g'(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har minst linjär konvergens som konvergerar mot $g'(x^*) \neq 0$.

2. Vi inför vektorn $a = [x, y, z]^T$ och skriver $f(a)$ istället för $f(x, y, z)$. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} f_1 &:= f'_x(x, y, z) = 2x - \sin(x + y + z) = 0, \\ f_2 &:= f'_y(x, y, z) = 2y - \sin(x + y + z) = 0, \\ f_3 &:= f'_z(x, y, z) = 2z - \sin(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

Newtons metod kan skrivas:

$$a^{k+1} = a^k - [J(a^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2x^k - \sin(x^k + y^k + z^k) \\ 2y^k - \sin(x^k + y^k + z^k) \\ 2z^k - \sin(x^k + y^k + z^k) \end{bmatrix},$$

där $J(a^k)$ är Jakobian på iteration k och

$$J(a) = \begin{bmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y & (f_1)'_z \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y & (f_2)'_z \\ (f_3)'_x & (f_3)'_y & (f_3)'_z \end{bmatrix}$$

och var

$$\begin{aligned} (f_1)'_x &= 2 - \cos(x + y + z), \\ (f_1)'_y &= -\cos(x + y + z), \\ (f_1)'_z &= -\cos(x + y + z), \\ (f_2)'_x &= -\cos(x + y + z), \\ (f_2)'_y &= 2 - \cos(x + y + z), \\ (f_2)'_z &= -\cos(x + y + z), \\ (f_3)'_x &= -\cos(x + y + z), \\ (f_3)'_y &= -\cos(x + y + z), \\ (f_3)'_z &= 2 - \cos(x + y + z). \end{aligned}$$

3. Ansätt $p(x) = ax + b$ vilket ger följande linjära ekvationssystem för obekanta a, b:

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= p(x_1), \\ ax_2 + b &= p(x_2). \end{aligned}$$

Eftersom $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2$ vi kan skriva systemet som

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1, \\ ax_2 + b &= y_2, \end{aligned}$$

från vilken vi kan hitta a, b:

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Vi sätter (a, b) in i $p(x) = ax + b$ och får det linjära interpolationspolynomet:

$$p(x) = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x = y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

4.

- a)

  Om vi ska approximera integral

  $$\int_a^b f(t) dt,$$

  t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[-1, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

  $$t = kx + m.$$

  För att bestämma koefficienter k, m ska vi lösa system:

  $$k \cdot (-1) + m = 5,$$
  $$k \cdot 1 + m = 10,$$

  då

  $$m = 7.5, \ k = 2.5.$$

  Linjär avbilding är:

  $$t = 2.5x + 7.5.$$

  Notera att

  $$dt = 2.5 \ dx; f(t) = f(2.5x + 7.5),$$

  integral $\int_5^{10} f(t) dt$ ska beräknas som:

  $$\int_5^{10} f(t) dt = 2.5 \cdot \int_{-1}^{1} f(2.5x + 7.5) \ dx$$
  $$\approx 2.5 \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i f(2.5 x_i + 7.5).$$

- b) Den sökta funktionen är styckvis kvadratisk och kan skrivas som

  $$p(t) = \begin{cases} p_1(t), \ 1 \leq t \leq 3, \\ p_2(t), \ 3 \leq t \leq 5, \end{cases}$$

  var $p_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, p_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$.

  Alla 6 koefficienterna $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ska bestämmas från följande villkor 1-3 för $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 5$:

1) Interpollationskravet ger oss 4 ekvationer:

$$a_1 t_1^2 + b_1 t_1 + c_1 = p_1(t_1) = 1,$$
$$a_1 t_2^2 + b_1 t_2 + c_1 = p_1(t_2) = 5,$$
$$a_2 t_2^2 + b_2 t_2 + c_2 = p_2(t_2) = 5,$$
$$a_2 t_3^2 + b_2 t_3 + c_2 = p_2(t_3) = 7.$$

2) Kontinuerlig första derivata $p_1'(t), p_2'(t)$ ger 1 villkor i punkten $t_2 = 3$:

$$p_1'(t_2) = p_2'(t_2),$$

eller

$$2a_1 t_2 + b_1 = 2a_2 t_2 + b_2.$$

3) 1 tillägsvillkor, till exempel:

$$p_1'(t_1) = p_2'(t_3),$$

eller

$$2a_1 t_1 + b_1 = 2a_2 t_3 + b_2.$$

5.

- a) Sätt

$$u_1(t) = y(t),$$
$$u_2(t) = y'(t),$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2(t), \\ u_2'(t) & = t^2 + u_1(t)u_2(t) + u_2(t), \\ u_1(-1) & = 5, \\ u_2(-1) & = 10. \end{cases}$$

- b) Se föreläsning 16. Explicit, eller Framåt-Eulers metod är:
  $v_{k+1} = v_k + \tau f(t_k, v_k)$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau}$.
  Framåt-Eulers metod för vårt problem är:

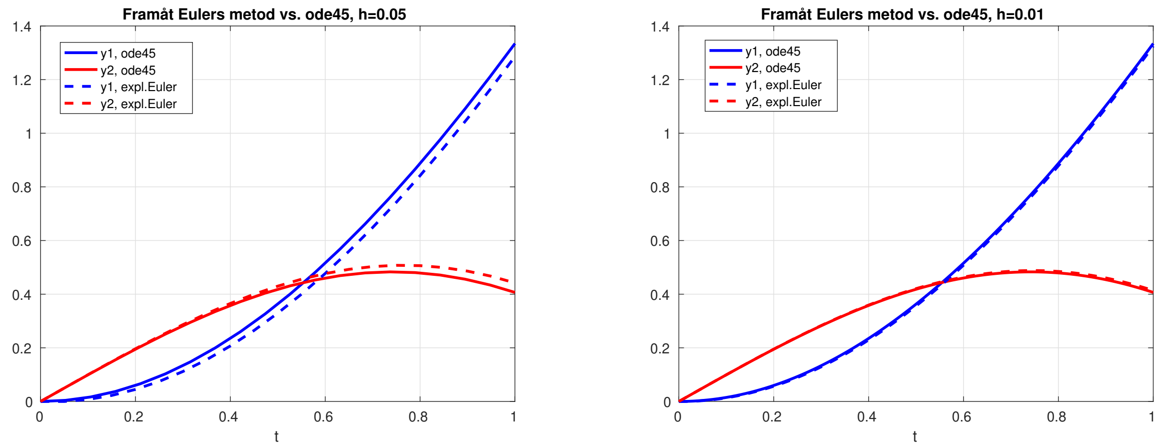
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = \sin(x_k) + 2t_k;$$
$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = \cos(y_k) - 2t_k x_k.$$

eller

$$y_{k+1} = y_k + \tau(\sin(x_k) + 2t_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + \tau(\cos(y_k) - 2t_k x_k).$$

Första iteration i den för $k = 0, t_0 = 0, y_0 = y(t_0) = y(0) = 0, x_0 = x(t_0) = 0$ ska vara:

$$y_1 = y_0 + \tau(\sin(x_0) + 2t_0) = 0 + \tau(0 + 2 \cdot 0) = 0;$$
$$x_1 = x_0 + \tau(\cos(y_0) - 2t_0 x_0) = 0 + \tau(1 - 2 \cdot 0) = \tau.$$



6. Expandera kvadraten och multiplicera med a^2:

$$y^2 - 2yc + c^2 + \frac{a^2}{d^2}x^2 = a^2$$

för att få:

$$2yc - (c^2 - a^2) - \frac{a^2}{d^2}x^2 = y^2.$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = c, x_2 = c^2 - a^2, x_3 = a^2/d^2$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[2y_k, -1, -x_k^2], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_m^2 \end{bmatrix}.$$

Sedan $c = x_1$, $a = \sqrt{c^2 - x_2}$, $d = a/\sqrt{x_3} = \sqrt{c^2 - x_2}/\sqrt{x_3}$. Problem med $c^2 - x_2 \leq 0$ (eftersom $a = \sqrt{c^2 - x_2}$ och $x_3 = a^2/d^2$).