Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-08-21

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Visa att matrisen nedan saknar LU-faktoriseringen:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
(1p)
- b) Skriv talet -20 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt matrisen A vara symmetrisk och positivt definit. Visa att $\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{1/2}$ definierar en vektornorm.
(3p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Använd Taylors formel för $g(x^k)$ och ge en bevis för att vi får kvadratisk konvergens för fixpunktsiteration om $g'(x^*) = 0$. Här, x^* är fixpunkt.
(3p)

2.
Vi vill hitta en funktion på formen
$$f(x) = ax + \mathrm{e}^{bx} + \sin(cx)$$
som satisfierar följande villkor: $f(1) = 5, f'(1) = 1, f''(2) = 10$ (a, b och c skall alltså bestämmas). Ställ upp ett system av ekvationer för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Vi vill bestämma den interpolerande splinefunktionen av grad 3 som interpolerar i punkterna (t_1, y_1), (t_2, y_2) och (t_3, y_3). Skriv ut alla villkor för splinefunktionen av grad 3 i punkterna (t_1, y_1), (t_2, y_2) och (t_3, y_3) för att bestämma koefficienterna i interpolanten.
(**2p**)

4.

- a) Vi har en kvadraturformel $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$. Hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[7, 10]$?
  (2p)
- b) Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) i två punkter 0 och π för att beräkna integralen $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$.
  (1p)

5.

- a) Skriv om följande problem på standardform och sedan som första ordningens system:

$$\begin{cases} t^2 v''(t) & = t^3 + v(t)v'(t) + z'(t)z(t) + (w(t))^3, \\ \frac{z''(t)}{v(t)} & = z(t) + \frac{v'(t)+t}{v(t)} - w(t), \\ w'(t) & = 5v(t)z'(t) + w(t) + t, \\ v(-1) & = -0.1, \\ v'(-1) & = -0.1, \\ z(-1) & = -0.1, \\ z'(-1) & = -0.2, \\ w(-1) & = 0.5. \end{cases}$$

  (2p)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t), \\ x(1) = 5. \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

  (2p)

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx 5^{\frac{\alpha}{\beta}} \exp^{\alpha t - \frac{\gamma}{\alpha} t^2}$$

där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(3p)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2019-08-21

1.

- a)
  Gör ansatsen

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_1 u_1 = 0 \\ l_1 u_2 = 1, \\ l_2 u_1 = 1 \\ l_2 u_2 + l_3 u_3 = 0 \end{cases}$$

  $l_1 u_1 = 0 \Rightarrow l_1 = 0$ eller $u_1 = 0$, men då kan inte $l_1 u_2 = 1$ och $l_2 u_1 = 1$.
- b) Vi kan skriva talet -20 som $-20 = -[1 + 0.25] \cdot 2^4$. Vi skriver exponenten 4 så här: $4 + 1023 = 1027 = 1024 + 3 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.25 = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4$. Vi får följande binär representation för -20:

$$|1|\underbrace{10000000011}_{exponenten}| \quad \underbrace{0100....0}_{mantissa\ 52\ bitar} \quad |$$

  där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000011 och mantissa 52 bitar kodas som 01000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först splittrar vi binär form:

$$1100 \quad 0000 \quad 0011 \quad 0100 \quad .... \quad 0000$$

  och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 1100 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = c, \\ 0000 &= 0, \\ 0011 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 = 3, \\ 0100 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 = 4, \\ 0000 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

  Hexadecimalt (bas 16) format för -20 är:

$$c034000000000000.$$

- c)
  Låt $A = LL^T$ vara Choleskyfaktoriseringen av A. Då är

$$\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x}^T L L^T \mathbf{x})^{1/2} = ((L^T x)^T (L^T x))^{1/2} = \|L^T x\|_2$$

  Vi kan alltså återinföra $\|\mathbf{x}\|_A$ på tvånormen. Eftersom A är positivt definit och därmed ickesingulär är även L ickesingulär, varför $L^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ Vi testar nu de tre normvillkoren:
  1) $\|\mathbf{x}\|_A > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ty $\|L^T \mathbf{x}\|_2 > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ty $\| \cdot \|_2$ är en norm.
  2) $\|\alpha \mathbf{x}\|_A = \|\alpha L^T \mathbf{x}\|_2 = |\alpha| \|L^T \mathbf{x}\|_2 = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_A$
  3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_A = \|L^T (\mathbf{x} + \mathbf{y})\|_2 \leq \|L^T \mathbf{x}\|_2 + \|L^T \mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_A + \|\mathbf{y}\|_A$

- d) Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$x_{k+1} - x^* = g(x_k) - x^* = \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \right) - x^*$$
$$= \underbrace{g'(x^*)}_{0}(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2$$
$$= \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2, \quad \Theta_k \in (x^*, x_k)$$

så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(\Theta_k|)}{2}$$

Om g är tillräckligt snäll kommer $g''(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har minst kvadratisk konvergens.

2. Ekvationerna blir:

$$a + \mathrm{e}^b + \sin c - 5 = 0,$$
$$a + b\mathrm{e}^b + c \cos c - 1 = 0,$$
$$b^2 \mathrm{e}^{2b} - c^2 \sin(2c) - 10 = 0,$$

och Newtons metod skrivs på följande vis:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{b_k} & \cos c_k \\ 1 & (1+b_k)\mathrm{e}^{b_k} & \cos c_k - c_k \sin c_k \\ 0 & 2b_k \mathrm{e}^{2b_k}(1+b_k) & -2c_k \sin(2c_k) - 2c_k^2 \cos(2c_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_k + \mathrm{e}^{b_k} + \sin c_k - 5 \\ a_k + b_k \mathrm{e}^{b_k} + c_k \cos c_k - 1 \\ b_k^2 \mathrm{e}^{2b_k} - c_k^2 \sin(2c_k) - 10 \end{bmatrix}.$$

3.

Den sökta funktionen är styckvis kubisk och kan skrivas som

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t), & t_1 \le t \le t_2, \\ p_2(t), & t_2 \le t \le t_3, \end{cases}$$

var $p_1(t) = a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1, p_2(t) = a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2$.

Alla 8 koefficienterna $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ ska bestämmas från följande villkor 1-3:

1) Interpollationskravet ger oss 4 ekvationer:

$$a_1 t_1^3 + b_1 t_1^2 + c_1 t_1 + d_1 = p_1(t_1) = y_1,$$
$$a_1 t_2^3 + b_1 t_2^2 + c_1 t_2 + d_1 = p_1(t_2) = y_2,$$
$$a_2 t_2^3 + b_2 t_2^2 + c_2 t_2 + d_2 = p_2(t_2) = y_2,$$
$$a_2 t_3^3 + b_2 t_3^2 + c_2 t_3 + d_2 = p_2(t_3) = y_3.$$

2) Kontinuerlig första derivata $p_1'(t), p_2'(t)$ ger 1 villkor i punkten t_2:

$$p_1'(t_2) = p_2'(t_2),$$

eller

$$3a_1 t_2^2 + 2b_1 t_2 + c_1 = 3a_2 t_2^2 + 2b_2 t_2 + c_2$$

3) Kontinuerlig andra derivata $p_1''(t), p_2''(t)$ ger 1 villkor i punkten t_2:

$$p_1''(t_2) = p_2''(t_2),$$

eller

$$6a_1t_2 + 2b_1 = 6a_2t_2 + 2b_2$$

3) Vi saknar 2 villkor, darför kräver vi 2 tillägsvillkor, till exempel:

$$p_1''(t_1) = 0, p_2''(t_3) = 0,$$

eller

$$6a_1t_1 + 2b_1 = 0;$$

$$6a_2t_3 + 2b_2 = 0.$$

4.a) Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[-1, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

Vi gör ett variabelbytte oh sätter $t = 1.5x + 8.5, dt = 1.5dx$, då integral $\int_7^{10} f(t)dt$ beräknas som

$$\begin{aligned}\int_7^{10} f(t)dt = 1.5\int_{-1}^{1} f\left(1.5x + 8.5\right)\ dx \\ \approx 1.5\omega_1 f\left(1.5x_1 + 8.5\right) + 1.5\omega_2 f\left(1.5x_2 + 8.5\right).\end{aligned}$$

b) Mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för $\int_0^\pi f(x)dx$ är:

$$\int_0^\pi f(x)dx \approx f\left(\frac{0+\pi}{2}\right) \cdot (\pi - 0).$$

I vårt fall har vi $f(x) = \sin x, f(\frac{0+\pi}{2}) = 1$, då mittpunktsmetoden för $\int_0^\pi \sin x\ dx$ ger oss:

$$\int_0^\pi \sin x\ dx \approx \pi.$$

5.

- a) Först skriver vi om systemet på standardform:

$$\begin{cases} v''(t) &= t + \frac{v(t)v'(t)+z'(t)z(t)+(w(t))^3}{t^2}, \\ z''(t) &= z(t)v(t) + v'(t) + t - w(t)v(t), \\ w'(t) &= 5v(t)z'(t) + w(t) + t, \\ v(-1) &= -0.1, \\ v'(-1) &= -0.1, \\ z(-1) &= -0.1, \\ z'(-1) &= -0.2, \\ w(-1) &= 0.5. \end{cases}$$

Sätt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t), \\ x_2(t) &= v'(t), \\ x_3(t) &= z(t), \\ x_4(t) &= z'(t), \\ x_5(t) &= w(t). \end{aligned}$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= t + \frac{x_1(t)x_2(t)+x_3(t)x_4(t)+(x_5(t))^3}{t^2}, \\ x_3'(t) &= x_4(t), \\ x_4'(t) &= x_1(t)x_3(t) + x_2(t) + t - x_5(t)x_1(t), \\ x_5'(t) &= 5x_1(t)x_4(t) + x_5(t) + t, \\ x_1(-1) &= -0.1, \\ x_2(-1) &= -0.1, \\ x_3(-1) &= -0.1, \\ x_4(-1) &= -0.2, \\ x_5(-1) &= 0.5. \end{cases}$$

- b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 237.
Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
$v_{k+1} = v_k + \tau f(t_{k+1}, v_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1}-v_k}{\tau}$ var $v_k = v(t_k)$.
Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} &= 5x_{k+1} - 2y_{k+1}, \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} &= x_{k+1} + y_{k+1}, \end{aligned}$$

som kan skrivas om :

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k &= 5\tau x_{k+1} - 2\tau y_{k+1}, \\ y_{k+1} - y_k &= \tau x_{k+1} + \tau y_{k+1}, \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x_{k+1} - 5\tau x_{k+1} + 2\tau y_{k+1} &= x_k, \\ -\tau x_{k+1} + y_{k+1} - \tau y_{k+1} &= y_k, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-5\tau)x_{k+1} + 2\tau y_{k+1} & = x_k, \\ -\tau x_{k+1} + (1-\tau)y_{k+1} & = y_k. \end{cases}$$

För att hitta x_{k+1}, y_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [x_{k+1}, y_{k+1}]^T$, känt vektor $b = [x_k, y_k]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1-5\tau & 2\tau \\ -\tau & 1-\tau \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi : $[x_0, y_0]^T = [x(t_0), y(t_0)]^T = [x(1), y(1)]^T = [5, 1]^T$. Första iteration i Bakåt-Eulers metod ska vara:

$$[x_1, y_1]^T = A^{-1}[x_0, y_0]^T = A^{-1}[5, 1]^T.$$

6. Logaritmera modellproblemet för att få:

$$\ln c \approx \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{x_1} \ln(5) + \underbrace{\alpha}_{x_2} t - \underbrace{\frac{\gamma}{\alpha}}_{x_3} t^2.$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}, x_2 = \alpha, x_3 = \frac{\gamma}{\alpha}$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[\ln(5), t_k, \ -t_k^2], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln(c_1) \\ \ln(c_2) \\ ... \\ \ln(c_m) \end{bmatrix}.$$

Sedan $\alpha = x_2, \beta = x_2/x_1, \gamma = x_3 x_2$.