Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2020-01-03

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Låt $x \in \mathbb{R}^n$. Bevisa att $\|x\|_1$ är en vektornorm.
  (3p)
- b) Skriv talet -40.0 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form.
  (3p)
- c) Bevisa att $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ för ortogonal matris $Q\cdot$
  (1p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Använd Taylors formel för $g(x^k)$ och ge en bevis för att vi får kvadratisk konvergens för fixpunktsiteration om $g'(x^*) = 0$. Här, x^* är fixpunkt.
  (3p)

2.

Vi har givet tre ytor i det tredimensionella rummet och vi vill numeriskt ta reda på om det finns någon skärningspunkt mellan de tre ytorna.

Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system. De tre ytorna har ekvationer:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 5, \\ x - 3x^2y + z\cos(y) &= 7, \\ x^3y + y^3x + z^3y &= 9. \end{aligned}$$

Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

---

3. Finn interpolationspolynomet $p(t)$ av grad 2 med basfunktioner $t^j, j = 0, 1, 2$ som interpolerar punkterna $(1, 6), (3, 34), (5, 86)$.
(**2p**)

4.

- Välj w_1, w_2, x_1, x_2, så att $w_1 = w_2$, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ?

$$\int_0^1 x^k dx = w_1 x_1^k + w_2 x_2^k, \quad k = 0, 1, ..., m.$$

  (**2p**)
- Använd trapetsmetoden för att beräkna integralen $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$.
  (**1p**)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} y''(t) = (y'(t))^3 + 5x(t)y(t) - (y'(t))^2, \\ x''(t) = x'(t) - y'(t) + x(t)y(t), \\ y(5) = 2, \\ y'(5) = 3, \\ x(5) = 1, \\ x'(5) = 5. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t) + 2t, \\ y'(t) = x(t) + y(t) + t + 1, \\ x(5) = 0. \\ y(5) = 0. \end{cases}$$

  (**2p**)

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx 5^{\beta} \exp^{\frac{\alpha}{\beta}t^2 - \frac{\gamma}{\alpha}t}$$

där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem på formen $\min_x \|Ax - b\|_2^2$. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2020-01-03

1.

- a) $\|x\|_1$ är en vektornorm eftersom följande villkor för normen är uppfyllda:
  (1) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
  (2) $\|\gamma\mathbf{x}\|_1 = \sum_1^n |\gamma x_k| = |\gamma| \sum_1^n |x_k| = |\gamma| \|\mathbf{x}\|_1$
  (3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_1^n |x_k + y_k| \leq \sum_1^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_1^n |x_k| + \sum_1^n |y_k| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$
- b) Vi kan skriva talet -40 som $-40 = -[1 + 0.25] \cdot 2^5$. Vi skriver exponenten 5 så här: $5 + 1023 = 1028 = 2^{10} + 2^2 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.25 = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4$. Vi får följande binär representation för -40:

$$|1|\underbrace{10000000100}_{exponenten}|\quad \underbrace{0100....0}_{mantissa\ 52\ bitar}\quad |$$

där 1 är kod för "−", exponenten 11 bitar kodas som 10000000100 och mantissa 52 bitar kodas som 01000....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$1100 \;\; 0000 \;\; 0100 \;\; 0100 \;\; .... \;\; 0000$$

och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned}
1100 &= c,\\
0000 &= 0,\\
0100 &= 4,\\
0100 &= 4,\\
0000 &= 0,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Hexadecimalt (bas 16) format för -40 är:

$$c044000000000000.$$

Kolla i Matlab:

```
q = quantizer('double');
y = num2bin(q,-40)

y =1100000001000100000000000000000000000000000000000000000000000000



 y = num2hex(q,-40)

y =

c044000000000000
```

- c) $\|Qx\|_2^2 = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T x = \|x\|_2^2 \to \|Qx\|_2 = \|x\|_2$.

d) Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$ följer

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - x^* = g(x_k) - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \right) - x^* \\
&= \underbrace{g'(x^*)}_{0}(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \\
&= \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2, \quad \Theta_k \in (x^*, x_k)
\end{aligned}
$$

så att

$$
\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(\Theta_k|)}{2}
$$

Om g är tillräckligt snäll kommer $g''(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har minst kvadratisk konvergens p.g.a. av "2" i termen $|x_k - x^*|^2$ (se definition om konvergensordningen).

2. Vi inför vektorn $a = [x, y, z]^T$ och skriver $f(a)$ istället för $f(x, y, z)$. Ekvationerna blir:

$$
\begin{aligned}
f_1(a) &:= x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \\
f_2(a) &:= x - 3x^2 y + z\cos(y) - 7 = 0, \\
f_3(a) &:= x^3 y + y^3 x + z^3 y - 9 = 0.
\end{aligned}
$$

Newtons metod kan skrivas:

$$
a_{k+1} = a_k - [J(a_k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 5 \\ x_k - 3x_k^2 y_k + z_k \cos(y_k) - 7 \\ x_k^3 y_k + y_k^3 x_k + z_k^3 y_k - 9. \end{bmatrix},
$$

där $J(a_k)$ är Jakobian på Newton's iteration k och

$$
J(a_k) = \begin{bmatrix} (f_1)'_x(a_k) & (f_1)'_y(a_k) & (f_1)'_z(a_k) \\ (f_2)'_x(a_k) & (f_2)'_y(a_k) & (f_2)'_z(a_k) \\ (f_3)'_x(a_k) & (f_3)'_y(a_k) & (f_3)'_z(a_k) \end{bmatrix}
$$

och var

$$
\begin{aligned}
(f_1)'_x(a_k) &= 2x_k, \\
(f_1)'_y(a_k) &= 2y_k, \\
(f_1)'_z(a_k) &= 2z_k, \\
(f_2)'_x(a_k) &= 1 - 6x_k y_k, \\
(f_2)'_y(a_k) &= -3x_k^2 - z_k \sin(y_k), \\
(f_2)'_z(a_k) &= \cos(y_k), \\
(f_3)'_x(a_k) &= 3x_k^2 y_k + y_k^3, \\
(f_3)'_y(a_k) &= x_k^3 + 3y_k^2 x_k + z_k^3, \\
(f_3)'_z(a_k) &= 3z_k^2 y_k.
\end{aligned}
$$

För punkter $(1,6),(3,34),(5,86)$ har vi:

$$t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 5,$$
$$p(t_1) = 6, p(t_2) = 34, p(t_3) = 86.$$

Interpolationspolynomet $p(t)$ av grad 2 med basfunktioner $t^j,\ j = 0,1,2$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 34 \\ 86 \end{bmatrix}, \tag{0.1}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 34 \\ 86 \end{bmatrix}, \tag{0.2}$$

vilket ger $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, och interpolationspolynomet blir

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 = 1 + 2t + 3t^2.$$

4.

- a) Formeln ska vara exakt för polynom $x^k, k = 0,1,2,...,m$ för maximalt m. Ekvationerna blir:

$$k = 0: \int_0^1 x^0 dx = 1 = w_1 + w_2,$$
$$k = 1: \int_0^1 x^1 dx = 1/2 = w_1 x_1 + w_2 x_2,$$
$$k = 2: \int_0^1 x^2 dx = 1/3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2,$$
$$k = 3: \int_0^1 x^3 dx = 1/4 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3.$$

  System som ska lösas:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1, \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= 1/2, \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= 1/3, \\ w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 &= 1/4. \end{aligned} \tag{0.3}$$

  Om $w_1 = w_2$, då $w_1 = w_2 = 0.5$ eftersom $w_1 + w_2 = 1$. Från systemet (0.3) kan vi hitta $x_1 = 1/2 - 1/(2\sqrt{3}), x_2 = 1/2 + 1/(2\sqrt{3})$. Kollar om $x_1 = 1/2 - 1/(2\sqrt{3}), x_2 = 1/2 + 1/(2\sqrt{3})$ är lösningar för $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 1/4$, och det stämmer. Stämmer det för $k = 4$? Inte. Så det polynomiella gradtalet är tre.

- b)
  Trapetsmetoden för $\int_0^\pi f(x)dx$ är:
  $$\int_0^\pi f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(\pi))\cdot(\pi-0).$$
  I vårt fall har vi $f(x)=\sin(x), f(0)=\sin 0=0, f(\pi)=\sin(\pi)=0$, då trapetsmetoden för $\int_0^\pi \sin(x)dx$ ger oss:
  $$\int_0^\pi \sin(x)dx \approx 0.$$

5.

- a) Sätt
  $$\begin{aligned} u_1(t) &= y(t), \\ u_2(t) &= y'(t), \\ u_3(t) &= x(t), \\ u_4(t) &= x'(t). \end{aligned}$$
  Vi får systemet:
  $$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2, \\ u_2'(t) & = (u_2)^3 + 5u_3u_1 - (u_2)^2, \\ u_3'(t) & = u_4, \\ u_4'(t) & = u_4 - u_2 + u_3u_1, \\ u_1(5) & = 2, \\ u_2(5) & = 3, \\ u_3(5) & = 1, \\ u_4(5) & = 5. \end{cases}$$
- b)
  Se föreläsningsanteckningarna, s. 237.
  Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
  $v_{k+1} = v_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1}-v_k}{\tau}$ var $v_k = v(t_k), t_{k+1} = t_k + dt$.
  Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:
  $$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} &= 5x_{k+1} - 2y_{k+1} + 2t_{k+1}, \\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} &= x_{k+1} + y_{k+1} + t_{k+1} + 1, \end{aligned}$$
  som kan skrivas om :
  $$\begin{cases} x_{k+1} - x_k & = 5\tau x_{k+1} - 2\tau y_{k+1} + 2\tau(t_k+\tau), \\ y_{k+1} - y_k & = \tau x_{k+1} + \tau y_{k+1} + \tau(t_k+\tau) + \tau, \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x_{k+1} - 5\tau x_{k+1} + 2\tau y_{k+1} & = x_k + 2\tau(t_k + \tau), \\ -\tau x_{k+1} + y_{k+1} - \tau y_{k+1} & = y_k + \tau(t_k + \tau) + \tau, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - 5\tau)x_{k+1} + 2\tau y_{k+1} & = x_k + 2\tau(t_k + \tau), \\ -\tau x_{k+1} + (1 - \tau)y_{k+1} & = y_k + \tau(t_k + \tau) + \tau. \end{cases}$$

För att hitta x_{k+1}, y_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [x_{k+1}, y_{k+1}]^T$, känt vektor $b = [x_k + 2\tau(t_k + \tau), y_k + \tau(t_k + \tau) + \tau]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 5\tau & 2\tau \\ -\tau & 1 - \tau \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi : $[x_0, y_0]^T = [x(t_0), y(t_0)]^T = [x(5), y(5)]^T = [0, 0]^T$. Första iteration i Bakåt-Eulers metod ska vara:

$$[x_1, y_1]^T = A^{-1}[x_0 + 2\tau(t_k + \tau), y_0 + \tau(t_k + \tau) + \tau]^T = A^{-1}[2\tau(5 + \tau), \tau(5 + \tau) + \tau]^T.$$

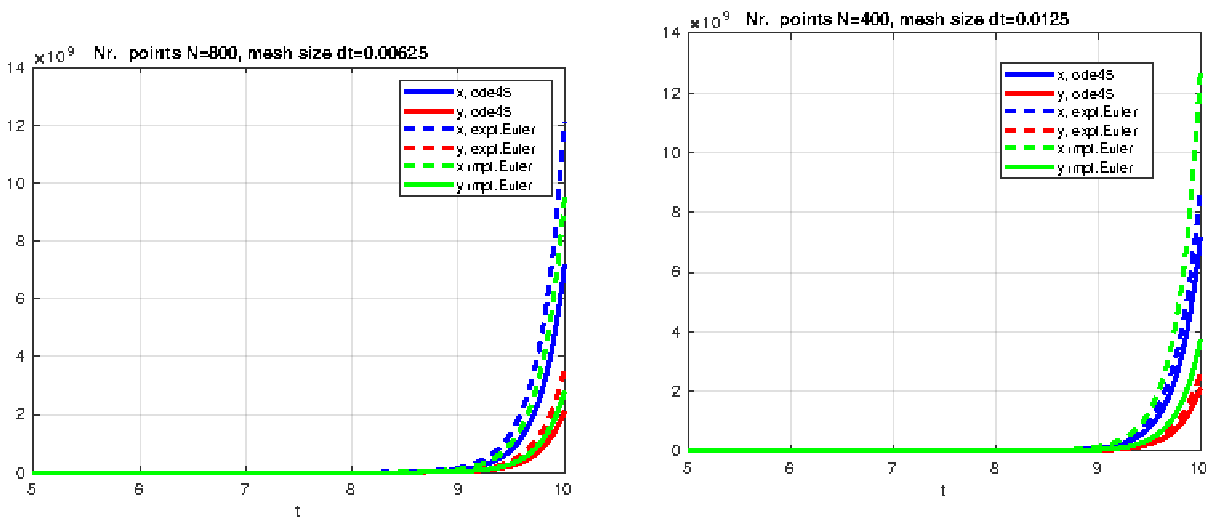

FIGURE 1. Framåt-Eulers metod och Bakåt-Eulers metod vs. ode45.

6. Logaritmera modellproblemet

$$c \approx 5^{\beta} \exp^{\frac{\alpha}{\beta}t^2 - \frac{\gamma}{\alpha}t}$$

för att få:

$$\ln c \approx \underbrace{\beta}_{x_1} \ln(5) + \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{x_2} t^2 - \underbrace{\frac{\gamma}{\alpha}}_{x_3} t.$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = \beta, x_2 = \alpha/\beta, x_3 = \gamma/\alpha$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2^2$, där raderna i A innehåller

$$[\ln(5), t_k^2, \ -t_k], \quad k = 1, ..., m,$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln(c_1) \\ \ln(c_2) \\ ... \\ \ln(c_m) \end{bmatrix}.$$

Sedan $\beta = x_1, \alpha = x_2\beta = x_2 \cdot x_1, \gamma = x_3\alpha = x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$.