Övningar MMG410: linjära ekvationssystem

Larisa Beilina, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

L. Beilina
Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

1. a) Visa att matrisen A är singulär.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Hur många lösningar har systemet $Ax = [2,4,6]^T$?

Lösning: a) $A[1,-1,1]^T = \mathbf{0} \rightarrow \det(A) = 0$.

b) In Matlab:

```
>> b/A
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =

   NaN   Inf  -Inf
```

2. Beräkna A^{-1} då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Inversen beräknas normalt med LU-faktorisering. Beteckna inversen med X, s.a. $AX = I$. Kolonnvis får vi $A\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k$, där $\mathbf{x}_k$ och $\mathbf{e}_k$ är kolonn k i X resp. I. Vi har n linjära ekvationssystem att lösa. A är triangulär vilket förenklar lösningsprocessen. Vi kan i detta specialfall beräkna inversen med tre framåt substitutioner.
Problemet kan även lösas via ansats. En triangulär matris har en triangulär invers (om den existerar) s.a. $(A^{-1})_{k,k} = 1/a_{k,k}$. Ansatsen ger

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

vilket ger systemet (visa !)

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta + \gamma + 1 = 0 \\ -\gamma - 2 = 0 \end{cases}$$

vilket ger $\alpha = \beta = 1$ och $\gamma = -2$.

3. A är kvadratisk med $A^2 = 0$ Visa att A är singulär.

Lösning:

$$0 = \det(A^2) = (\det A)^2 \Rightarrow \det A = 0.$$

4. Antag att $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Visa att: a) $(AB)^T = B^T A^T$ samt b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (när A och B är ickesingulära).

Lösning:

a) Vi visar istället $(A^T B)^T = B^T A$. Detta är ekvivalent med det som efterfrågas om vi tar $C = A^T$. Partitionera matriserna kolonnvis $A = [\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_n}]$ och $B = [\mathbf{b_1}, ..., \mathbf{b_n}]$. Vi får $A^T B =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_1}^T \\ \mathbf{a_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a_n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{b_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_1} & \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_n} \\ \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_1} & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_n}^T\mathbf{b_1} & \mathbf{a_n}^T\mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{a_n}^T\mathbf{b_n} \end{bmatrix}$$

Transponatet av ovanstående blir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_1} & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_1} & \cdots & \mathbf{a_n}^T\mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_2} & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_1}^T\mathbf{b_n} & \mathbf{a_2}^T\mathbf{b_n} & \cdots & \mathbf{a_n}^T\mathbf{b_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1}^T\mathbf{a_1} & \mathbf{b_1}^T\mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{b_1}^T\mathbf{a_n} \\ \mathbf{b_2}^T\mathbf{a_1} & \mathbf{b_2}^T\mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{b_2}^T\mathbf{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b_n}^T\mathbf{a_1} & \mathbf{b_n}^T\mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{b_n}^T\mathbf{a_n} \end{bmatrix}$$

vilket är lika med $B^T A$. Likheten ovan följer av att $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$.
b) Det enklaste sättet är att multiplicera ihop matriserna och se att vi får enhetsmatrisen:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Multiplikationen från andra hållet följer analogt.

5. A är ickesingulär. Visa att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ Vi skriver därför A^{-T}.

Lösning:

Vi visar först att inversen är entydig. Om C är ickesingulär och $CX = I$, $CY = I$ följer $C(X - Y) = 0$, men C är ickesingulär så $X - Y = 0$.

Vidare är $A^T(A^T)^{-1} = I$ men det gäller även att $I = A^{-1}A = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$. Det följer att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

6. Beskriv, i punktform, hur man löser systemet

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ B & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix},$$

L_1 och L_2 är undertriangulära ickesingulära matriser. Vektorerna har partitionerats så att de passar ihop med blocken i matrisen.

Lösning:

Systemet är ekvivalent med

$$\begin{aligned} L_1\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ B\mathbf{x} + L_2\mathbf{y} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

Algoritm: Lös $L_1\mathbf{x} = \mathbf{b}$, bilda $\mathbf{t} = \mathbf{c} - B\mathbf{x}$ och lös slutligen $L_2\mathbf{y} = \mathbf{t}$.

7. a) Beräkna LU-faktoriseringen av matrisen nedan. b) När är matrisen singulär?

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ c & b \end{bmatrix}$$

Lösning:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ c & b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} u_{11}\ell_{11} & \ell_{11}u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}\cdot u_{12} + \ell_{22}\cdot u_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\ell_{11}u_{11} = 1, \ell_{11}u_{12} = a, \ell_{21}u_{11} = c, \ell_{21}\cdot u_{12} + \ell_{22}\cdot u_{22} = b, \ell_{11} = \ell_{22} = 1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b - ca \end{bmatrix}$$

Singulär om $b = ca$.

8. Visa att en symmetrisk och positivt definit matris A har: a) positiva diagonalelement; b) ”stor diagonal”, $a_{j,j} + a_{k,k} > 2|a_{j,k}|$; c) det till beloppet största elementet på diagonalen; d) har positiva diagonalelement, i D, i LDL^T faktoriseringen.

Lösning:

Definition: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0, \forall x \neq 0$.
a) Tag $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k^T A\mathbf{e}_k = a_{k,k}$.
b) Med $\sigma = -\text{sign}(a_{j,k})$ och $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j + \sigma\mathbf{e}_k$ fås

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a_{j,j} + 2\sigma a_{j,k} + a_{k,k} > 0 \Rightarrow \frac{a_{j,j} + a_{k,k}}{2} > |a_{j,k}|$$

$$\text{c) } |a_{j,k}| < \frac{a_{j,j} + a_{k,k}}{2} \leq \max(a_{j,j}, a_{k,k})$$

d) Eftersom A är positivt definit kan man visa att LDL^T-faktoriseringen alltid existerar (dvs. inget pivotelement kan bli noll). L är alltså ickesingulär och vi kan ta $\mathbf{x} = L^{-T}\mathbf{e}_k$ ($\mathbf{e}_k$ är kolonn k i I). x kan inte vara noll (varför?) och vi får

$$0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [L^{-T}\mathbf{e}_k]^T LDL^T [L^{-T}\mathbf{e}_k] = \mathbf{e}_k^T D\mathbf{e}_k = d_{k,k}$$

9. Visa att matrisen nedan saknar LU-faktoriseringen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Gör ansatsen

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_1 u_1 = 0 \\ l_1 u_2 = 1, \\ l_2 u_1 = 1 \\ l_2 u_2 + l_3 u_3 = 0 \end{cases}$$

$l_1 u_1 = 0 \Rightarrow l_1 = 0$ eller $u_1 = 0$, men då kan inte $l_1 u_2 = 1$ och $l_2 u_1 = 1$.

10. Använd Choleskyfaktorisering för att avgöra för vilka α följande matris är positivt definit.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Vi behöver antaga $\alpha \neq 0$ för första steget i Gausseleminationen:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} \ell_{11}^2; & \ell_{11} \cdot \ell_{21} \\ \ell_{21} \cdot \ell_{11}; & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = LL^T,$$

L = $\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 1/\sqrt{\alpha} & \sqrt{2 - 1/\alpha} \end{bmatrix}$

För att kunna dra roten ur diagonalen måste $\alpha > 0$ och $2 - 1/\alpha > 0$. Alltså $\alpha > 1/2$.

11. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. När existerar $(I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}$? Bestäm inversen när så är fallet (Den har nästan samma form som matrisen själv).

Lösning:

a) Om matrisen är singulär existerar $\mathbf{x} \neq 0$ så att $(I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dvs. $\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{x})$, dvs. $\mathbf{x}$ måste vara parallell med $\mathbf{u}$. Tag $\mathbf{x} = \mathbf{u}$. Detta ger $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})$ dvs. $\mathbf{v}^T\mathbf{u} = 1$. Om $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 1$ är matrisen ickesingulär.

$$(I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)(I - \sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = I - \sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^T = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T(1 + \sigma - \sigma\mathbf{v}^T\mathbf{u})$$

Detta är enhetsmatrisen om $\sigma = 1/(\mathbf{v}^T\mathbf{u} - 1)$ och $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \neq 1$.

12. Visa att $\|\cdot\|_p,\ p = 1, 2, \infty$ verkligen är vektornormer.

Lösning:

$p = 1$:
1) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
2) $\|\gamma\mathbf{x}\|_1 = \sum_1^n |\gamma x_k| = |\gamma| \sum_1^n |x_k| = |\gamma|\|\mathbf{x}\|_1$
3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_1^n |x_k + y_k| \leq \sum_1^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_1^n |x_k| + \sum_1^n |y_k| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$
$p = 2$:
1) och 2) enkla, visar tredje villkoret.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y})^T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} \\
&\leq \|\mathbf{x}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 = (\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2)^2
\end{aligned}$$

$p = \infty$:
1) och 2) enkla, visar tredje villkoret.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty &= \max_k |x_k + y_k| \leq \max_k (|x_k| + |y_k|) \leq \max_k |x_k| + \max_k |y_k| \\
&= \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty
\end{aligned}$$

13. Visa att $\|\cdot\|_p,\ p = 1, \infty$ verkligen är matrisnormer.

Lösning:

$p = 1$:
1) $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$ så om $A \neq 0$ finns något $a_{i,j} \neq 0$ varför $\|A\|_1 > 0$.
2) $\|\gamma A\|_1 = \max_j \sum_i |\gamma a_{i,j}| = \max_j \sum_i |\gamma||a_{i,j}| = |\gamma| \max_j \sum_i |a_{i,j}| = |\gamma|\|A\|_1$
3) $\|A + B\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \max_j \sum_i (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) \leq \max_j \sum_i |a_{i,j}| + \max_j \sum_i |b_{i,j}| = \|A\|_1 + \|B\|_1$
Nu till submultiplikativiteten. Vi visar $\|A\mathbf{x}\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{x}\|_1$ först. Det följer från definitionen av normen

$$\|A\|_1 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$

att $\|A\|_1 \geq \|A\mathbf{x}\|_1/\|\mathbf{x}\|_1$. Nu till $\|AB\|_1$. Antag att max antas för kolonn k i B:

$$\|AB\|_1 = \|A\mathbf{b}_k\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{b}_k\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1$$

$p = \infty$ kan visas analogt. Ett trick är att $\|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$.

14. Visa att $\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{1/2}$ definierar en vektornorm (elliptisk norm), då A är symmetrisk och positivt definit.

Lösning:

Låt $A = CC^T$ vara Choleskyfaktoriseringen av A. Då är

$$\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{1/2} = (\mathbf{x}^T CC^T\mathbf{x})^{1/2} = ((C^T x)^T (C^T x))^{1/2} = \|C^T x\|_2$$

Vi kan alltså återinföra $\|\mathbf{x}\|_A$ på tvånormen. Eftersom A är positivt definit och därmed ickesingulär är även C ickesingulär, varför $C^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ Vi testar nu de tre normvillkoren:
1) $\|\mathbf{x}\|_A > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ty $\|C^T\mathbf{x}\|_2 > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ty $\|\cdot\|_2$ är en norm.
2) $\|\alpha\mathbf{x}\|_A = \|\alpha C^T\mathbf{x}\|_2 = |\alpha|\|C^T\mathbf{x}\|_2 = |\alpha|\|\mathbf{x}\|_A$
3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_A = \|C^T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|_2 \leq \|C^T\mathbf{x}\|_2 + \|C^T\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_A + \|\mathbf{y}\|_A$

15. a) Visa att $\|A\|_{\max} = \max_{i,j}|a_{i,j}|$ definierar en matrisnorm, men att den ej är submultiplikativ. b) Visa att $\|A\|_F = (\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2)^{1/2}$ är en matrisnorm (Frobeniusnormen).

Lösning:

a)
1) $\|A\|_{\max} = \max_{j,k}|a_{j,k}| > 0$ om något $a_{j,k} \neq 0$.
2) $\|\gamma A\|_{\max} = \max_{j,k}|\gamma a_{j,k}| = |\gamma|\max_{j,k}|a_{j,k}| = |\gamma|\|A\|_{\max}$
3) $\|A+B\|_{\max} = \max_{j,k}|a_{j,k}+b_{j,k}| \leq \max_{j,k}(|a_{j,k}|+|b_{j,k}|) \leq \max_{j,k}|a_{j,k}| + \max_{j,k}|b_{j,k}| = \|A\|_{\max} + \|B\|_{\max}$

Notera att denna norm inte är submultiplikativ. Tag $A =$ `ones(2)`. Då är $\|AA\|_{\max} = 2$, men $\|A\|_{\max} = 1$.
b) Låt $\text{vec}(A)$ vara den vektor som fås om man staplar alla A:s kolonner på varandra. Vi ser att $\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2$.

1) $\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2 > 0$ om något $a_{i,j} \neq 0$.
2) $\|\gamma A\|_F = \|\gamma\text{vec}(A)\|_2 = |\gamma|\|\text{vec}(A)\|_2 = |\gamma|\|A\|_F$
3) $\|A+B\|_F = \|\text{vec}(A+B)\|_2 = \|\text{vec}(A)+\text{vec}(B)\|_2 \leq \|\text{vec}(A)\|_2 + \|\text{vec}(B)\|_2 = \|A\|_F + \|B\|_F$

16. Låt $D = \text{diag}(d_1,\ldots,d_n)$ med alla $d_i \neq 0$. Beräkna $\kappa(D)$ (för de tre normer vi använder).

Lösning:

$D^{-1} = \text{diag}(1/d_1,\ldots,1/d_n)$. För en diagonalmatris gäller $\|D\| = \max_k|d_k|$ (för de tre normer vi använder). Så $\kappa(D) = \max|d_k|\max|1/d_k| = \max|d_k|/\min|d_k|$.

17. Beränka $\kappa_1(A)$ som funktion av α då

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Om $\alpha = 1$ så är matrisen singulär och vi säger att $\kappa_1(A) = \infty$. I annat fall gäller

$$\kappa_1(A) = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_1}_{\|A\|_1} \underbrace{\left\| \frac{1}{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_1}_{\|A^{-1}\|_1}$$
$$= \underbrace{\max(1+|\alpha|,2)}_{\|A\|_1} \cdot \underbrace{\max(1+|\alpha|,2)/|1-\alpha|}_{\|A^{-1}\|_1}$$

Med andra ord, $\kappa_1(A) = 4/|1-\alpha|$ om $|\alpha| < 1$ och $(1+|\alpha|)^2/|1-\alpha|$ annars.

18. Visa att en positivt definit matris A är: a) ickesingulär och att b) inversen är positivt definit.

Lösning:

a) Om A är singulär existerar $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ s.a. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Medför att $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, motsägelse!

b) Vi kräver inte att A är symmetrisk utan vet bara att $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tag $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ (notera att $\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$). Vi får $0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (A^{-1}\mathbf{y})^T A(A^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y}$ som är en skalär så att vi kan skriva (eftersom $(\text{skalär})^T$ är det samma skalär) $(\mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y}$. Men $(\mathbf{y}^T A^{-T}\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{y}$. Alltså är $0 < \mathbf{y}^T A^{-1}\mathbf{y}$.

19. Antag att $A = BB^T$ där B är ickesingulär. Visa att A är symmetrisk och positivt definit.

Lösning:

Symmetrisk ty $A^T = (BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T = A$.

Positivt definit ty $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T BB^T\mathbf{x} = (B^T\mathbf{x})^T B^T\mathbf{x} = \|B^T\mathbf{x}\|_2^2 > 0$ om $\mathbf{x} \neq 0$.

20. Antag att B nedan, av ordning $n+1$, är symmetrisk och positivt definit, α är en skalär, $\mathbf{a}$ en kolonnvektor om n element, och A en kvadratisk matris av ordning n.

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix}$$

a) Visa att $\alpha > 0$ och att A är positivt definit.
b) Beräkna Choleskyfaktoriseringen av B i termen av α, $\mathbf{a}$ och A.

Lösning:

a) $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$ om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tag $x = e_1 \neq \mathbf{0}$. Ger $0 < e_1^T B e_1 = e_1^T [\alpha, \mathbf{a}^T]^T = \alpha$. Tag nu $\mathbf{x}^T = [0, \mathbf{y}]$ med godtyckligt $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Detta medför att

$$0 < \mathbf{x}^T B\mathbf{x} = [0, \mathbf{y}^T] \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T\mathbf{y} \\ A\mathbf{y} \end{bmatrix}} = \mathbf{y}^T A\mathbf{y}.$$

b) Gör ansatsen (L matris, $\mathbf{z}$ vektor, och λ skalär):

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{z} & L \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{0} & L^T \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mathbf{z}^T \\ \lambda\mathbf{z} & \mathbf{z}\mathbf{z}^T + LL^T \end{bmatrix}$$

vilket medför $\lambda = \sqrt{\alpha}$, $\mathbf{z} = \mathbf{a}/\sqrt{\alpha}$ och $LL^T = A - \mathbf{z}\mathbf{z}^T = A - \mathbf{a}\mathbf{a}^T/\alpha$.

21. Antag att $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ har rang n. Visa att $A^T A$ är positivt definit.

Lösning:

Vi kollar:

$$x^T(A^T A)x = (Ax)^T(Ax) = ||Ax||_2^2$$

Det sista uttrycket kan inte vara negativt (det är ju en norm). Så frågan är om det kan vara noll även om $x \neq 0$.

$$||Ax||_2 = 0 \rightarrow Ax = 0$$

vilket inte kan inträffa eftersom A har full kolonnrang enligt förutsättningarna.

22. Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är både ortogonal och triangulär.

- a) Visa att A är diagonal.
- b) Vilka diagonalelement har A?

Lösning:

- a) Antag att A är reell och undertriangulär. Eftersom A dessutom ar ortogonal gäller att $AA^T = I$. Innerprodukterna mellan första raden i A och kolonnerna i A^T blir

  $$a_{1,1}\cdot a_{1,1}, a_{1,1}\cdot a_{2,1}, a_{1,1}\cdot a_{3,1}, \ldots, a_{1,1}\cdot a_{n,1}$$

  eftersom första raden i A endast innehåller ett element skilt från noll (nämligen $a_{1,1}$). Men eftersom första raden i enhetsmatrisen har nollor utom i första positionen måste

  $$a_{2,1} = a_{3,1} = \ldots a_{n,1} = 0.$$

  Vi kan nu utnyttja induktion och upprepa resonemanget för andra kolonnen i A osv.
- b) Det måste gälla att $a_{k,k}^2 = 1$ så att $a_{k,k} = \pm 1$.

För $n = 2$ har vi:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

23. Antag att den partitionerade matrisen nedan är ortogonal (A och C är kvadratiska). Visa att A och C måste vara ortogonala och att $B = 0$.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Lösning:

Detta är en form av generalisering av föregående övning. Vi kollar:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B + C^T C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Detta innebär att $A^T A = I$, så att A är ortogonal. $A^T B = 0$ skall vara nollmatrisen vilket, eftersom A är ortogonal och därmed ickesingulär, medför att $B = 0$. Detta medför slutligen att C är ortogonal, ty $B^T B + C^T C = I$.