Övningar MMG410: ickelinjära ekvationer

Larisa Beilina, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

L. Beilina
Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

1. Man kan härleda Newtons metod med hjälp av Taylors formel. Vi står i punkten x_k och söker en korrektion, h, så att $f(x_k+h)=0$. Gör en Taylorutveckling och ta bara med upp till första ordningens termer i h.

   Lösning:

   Taylors formel:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2/2+\ldots$$

$$0=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

   eller i iterativt form för $x=x_k+h$,

$$0=f(x_k+h)\approx f(x_k)+hf'(x_k)$$

   så

$$h\approx -f(x_k)/f'(x_k)$$

   vilket ger nästa punkt

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k),$$

   eller Newtons metod.
2. Uppskatta $|x^*-\hat{x}|$ då $f(x)=x^3-2x-5$ och $\hat{x}=2.1$ för problemet $f(x)=0$.

   Lösning:

   Residualen är $f(\hat{x})=\hat{x}^3-2\hat{x}-5=0.061>0$. Eftersom $f(2)=2^3-2\cdot 2-5=-1<0$ finns minst en rot i intervallet $(2,2.1)$. Vi noterar att $f'(x)=3x^2-2>0$ om $x>\sqrt{2/3}\approx 0.82$. Detta innebär att funktionen är strängt växande vid (det enda) nollstället och att $x^*<\hat{x}$. Vi har visat att $|x^*-\hat{x}|\leq |f(\hat{x}|/M$ där M är en undre begränsning av $|f'(x)|$ i intervallet $x(x^*,\hat{x})$. Eftersom derivatan är strängt växande och positiv för $x\in[2,2.1]$ och eftersom $2<x^*<\hat{x}$ så gäller att $|x^*-\hat{x}|\leq 0.061/f'(2.1)=0.0054319$. För att sammanfatta: $2.1-0.0054319=2.0946\leq x^*<2.1$ Taylors formel är:

$$0=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

   För exakt x^* och $x_0=\hat{x}$ Taylors formel är:

$$0=f(x^*)\approx f(\hat{x})+f'(\hat{x})(x^*-\hat{x})$$

   eller för $\hat{x}=2.1$:

$$|x^*-\hat{x}|\leq |f(\hat{x})/f'(\hat{x})|=0.061/f'(2.1)=0.0054319.$$

3. Vi vill uppskatta $|x^*-\hat{x}|$, då $f(x)=x^4-6x^2+9$ med $\hat{x}=1.7$. Notera att $\sqrt{3}$ är en dubbelrot.

Lösning:

Residualen är $f(\hat{x}) = 0.0121 > 0$. Det är inte möjligt att få någon användbar begränsning av derivatan, $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x \cdot (x^2 - 3)$, ty $f'(\sqrt{3}) = 0$. Vi misstänker starkt att $\sqrt{3}$ är en dubbelrot (dvs. $f(x^*) = f'(x^*) = 0$). För att få en gräns på $|x^* - \hat{x}|$ utnyttjar vi en term till i Taylorutvecklingen och får:

$$f(\hat{x}) = f(x^* + \underbrace{\hat{x} - x^*}_{h}) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + (\hat{x} - x^*)\underbrace{f'(x^*)}_{0} + \frac{(\hat{x} - x^*)^2}{2} f''(\xi), \;\; \xi \in (x^*, \hat{x}).$$

Om $M \leq |f''(\xi)|, \xi \in (\hat{x}, x^*)$ gäller att

$$|\hat{x} - x^*| \leq \sqrt{\frac{2|f(\hat{x})|}{M}}$$

Vi vill uppskatta $|x^* - \hat{x}|$, då $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ med $\hat{x} = 1.7$.
Vi ser att $f''(x) = (x^4 - 6x^2 + 9)''_x = 12(x^2 - 1)$ som är växande i en omgivning kring roten $\sqrt{3}$. Vi noterar att $f(x)$ uppför sig som en parabel i en omgivning av roten. Eftersom $f'(\hat{x}) = f'(1.7) = -0.748 < 0$ ligger $\hat{x}$ till vänster om x^*. Alltså kan vi ta $M = f''(\hat{x})$ och får:

$$|\hat{x} - x^*| \leq \sqrt{\frac{2|f(\hat{x})|}{f''(\hat{x})}} < 3.3 \cdot 10^{-2}$$

För att sammanfatta:

$$1.7 \leq x^* \leq 1.7 + 3.3 \cdot 10^{-2}.$$

4. Sätt upp Newtons metod för problemet $x^2 = 1$ och visa att metoden aldrig konvergerar om $x^0 = \alpha i, \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$. (Vi studerar komplexa x_k med andra ord). Visa slutligen att metoden konvergerar för alla reella $x_0 \neq 0$ (svårare).

Lösning:

Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Vi har: $f(x) = x^2 - 1 = 0, f(x_k) = x_k^2 - 1, f'(x_k) = 2x_k$, Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 1}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 1}{2x_k} = (x_k + 1/x_k)/2.$$

Om x_k är rent imaginärt $x_k = \alpha i$ så gäller

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (x_k + 1/x_k)/2 = (\alpha i + 1/\alpha i)/2 = (\alpha i + i/\alpha i \cdot i)/2 \\ &= \frac{i}{2}\left[\alpha - \frac{1}{\alpha}\right] \end{aligned}$$

som också är rent imaginärt. Så om något x_k är rent imaginärt så kommer också alla efterföljande värden att vara det (enda undantaget är om något $x_k = 0$ i vilket fall x_{k+1} inte existerar). Fixpunkterna: $x^* = f(x^*)$:

$$x^* = (x^* + 1/x^*)/2,$$
$$2x^* = x^* + 1/x^*;\ 2x^* = \frac{(x^*)^2 + 1}{x^*},$$
$$2(x^*)^2 - (x^*)^2 - 1 = 0;\ (x^*)^2 - 1 = 0; x^* = \pm 1.$$

Eftersom fixpunkterna är ± 1 och reella (och inte är rent imaginära) så får vi ingen konvergens.

5. Sätt upp Newtons metod för följande problem:
a) $x^3 - 2x - 5 = 0$.
b) $e^{-x} = x$.
c) $x \sin x = 1$.

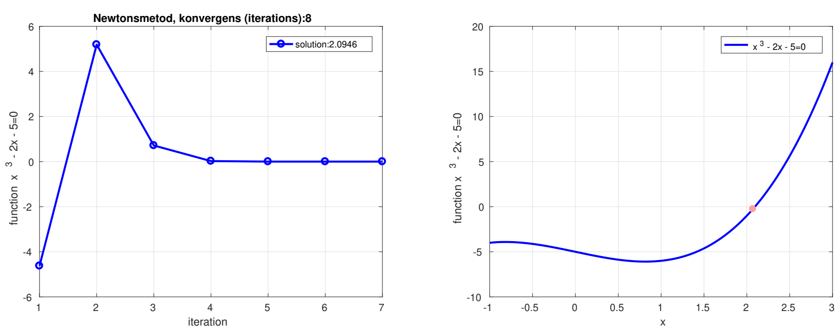
Lösning:

Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

a) $f(x) = x^3 - 2x - 5, f'(x) = 3x^2 - 2$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2}.$$



a) Konvergens b) Exakt funktion $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$

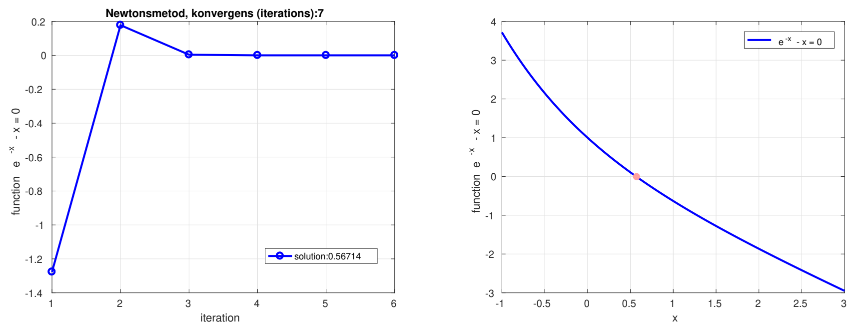
Fig. 1 *Newtons metod för* $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ *med* $x_0 = 1.5, tol = 10^{-15}$.

b) $e^{-x} = x$.
Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

$f(x) = e^{-x} - x, f'(x) = -e^{-x} - 1$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1}.$$



a) Konvergens

b) Exakt funktion $f(x) = e^{-x} - x = 0$

Fig. 2 *Newtons metod för* $f(x) = e^{-x} - x = 0$ *med* $x_0 = 1.5, tol = 10^{-15}$.

c) $x \sin x = 1$.
Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

$f(x) = x \sin x - 1, f'(x) = \sin x + x \cos x$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \sin x_k - 1}{\sin x_k + x_k \cos x_k}.$$

6. Newtons metod används ibland för att implementera kvadratrotsfunktionen. Vi vill beräkna $\sqrt{y}$, sätt upp Newtons metod för problemet.

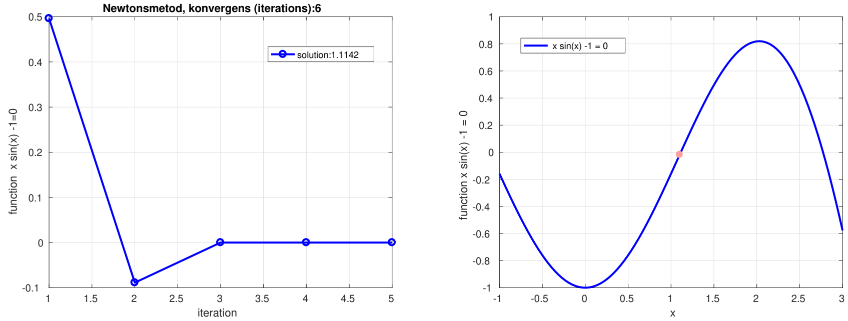
Lösning:

Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Vi har: $x = \sqrt{y}$, här x är okänt, då $x^2 = y$ och vi kan ta $f(x) = x^2 - y = 0$. Newtons metod för att lösa $f(x) = x^2 - y = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2x_k}.$$



a) Konvergens b) Funktion $f(x) = x\sin x - 1 = 0$

Fig. 3 *Newtons metod för* $f(x) = x\sin x - 1 = 0$ *med* $x_0 = 1.5, tol = 10^{-15}$.

7. Även division, $1/y$, kan implementeras med hjälp av Newtons metod. Formulera en lämplig ekvation och sätt sedan upp Newtons metod (som givetvis inte får innehålla någon division) för ekvationen.

   Lösning:

   Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

   Vi har: $x = 1/y$, här x är okänt, då $1/x = y$ och vi kan ta $f(x) = 1/x - y = 0$. Newtons metod för att lösa $f(x) = 1/x - y = 0$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1/x_k - y}{(-x_k^{-2})} = x_k + (1/x_k - y)(x_k)^2 \\ &= x_k + ((1 - yx_k)/x_k)(x_k)^2 = x_k + (1 - yx_k)x_k = x_k + x_k - yx_k^2 \\ &= 2x_k - yx_k^2 = x_k(2 - yx_k). \end{aligned}$$

8. Vi vill lösa ekvationen $x^2 - y = 0$ givet y och studerar därför fixpunktsiterationer, $x_{k+1} = g(x_k)$.
   a) Är $g_1(x) = y + x - x^2$ respektive $g_2(x) = 1 + x - x^2/y$ lokalt konvergenta metoder om $y = 3$?
   b) Hur ser den $g(x)$ ut som svarar mot Newtons metod?

   Lösning:

   a) Om vill lösa ekvationen $x^2 - y = 0$, då $x^2 = y$ och $x = \sqrt{y}$.
   När $g_1(x) = y + x - x^2$ har vi: $g_1'(x) = 1 - 2x$ eller för $x = \sqrt{y}$ har vi: $g_1'(\sqrt{y}) = 1 - 2\sqrt{y}$. Om $y = 3$ då $g_1'(\sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3}, |g_1'(\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}| \approx 2.5 > 1$ och metoden $x_{k+1} = g_1(x_k)$ är ej konvergent.

För funktionen $g_2(x) = 1 + x - x^2/y$ har vi $g_2'(x) = 1 - 2x/y$ eller för $x = \sqrt{y}$ har vi: $g_2'(\sqrt{y}) = 1 - 2\sqrt{y}/y = 1 - 2/\sqrt{y}$. Om $y = 3$ då $g_2'(\sqrt{3}) = 1 - 2/\sqrt{3} \approx 0.15 < 1$ och metoden $x_{k+1} = g_2(x_k)$ är konvergent. Fixpunkt: för exakt x^* vi ska lösa $g_2(x) : x^* = g_2(x^*)$ eller $g_2(\sqrt{y}) = 1 + \sqrt{y} - y/y = \sqrt{y}$. Vi kan skriva om den ekvation som $x^* = g_2(x^*)$ för $x^* = \sqrt{y}$, alltså $x^* = \sqrt{y}$ är fixpunkt.
b) Hur ser den $g(x)$ ut som svarar mot Newtons metod ?
Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Nu har vi: $f(x) = x^2 - y = 0, f'(x) = 2x$. Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{{x_k}^2 - y}{2x_k} = \underbrace{\frac{x_k}{2} + \frac{y}{2x_k}}_{g(x_k)}.$$

Så $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2x}$ och $g'(x) = 1/2 - \frac{y}{2x^2}$. För $x = \sqrt{y}$ har vi: $g_2'(\sqrt{y}) = 1/2 - \frac{y}{2y} = 0 < 1$ och metoden $x_{k+1} = x_k - \frac{{x_k}^2 - y}{2x_k}$ är konvegrent.
Fixpunkt: för exakt x^* vi ska lösa $g_2(x) : x^* = g(x^*)$ eller

$$x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{y}{2x^*}.$$

För $x^* = \sqrt{y}$ har vi:

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$$

och $x^* = \sqrt{y}$ är fixpunkt.

9. Formulera Newtons metod för följande två problem:
a)
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$
b)
$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0, \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Lösning:

Newtons metod för system är:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k)^{-1}) f(x_k), \tag{1}$$

var $J(f(x_k)^{-1})$ är inversa Jacobianen.
a) För problem

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

har vi för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod (1) blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k & 2x_2^k \\ 2x_1^k & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 - 1 \\ (x_1^k)^2 - (x_2^k) \end{bmatrix}$$

b) För problem

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0, \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

har vi för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod (1) för $x = (x_1, x_2)^T$ blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k + (x_2^k)^3 & 3x_1^k (x_2^k)^2 \\ 3x_2^k \cdot 2x_1^k & 3(x_1^k)^2 - 3(x_2^k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 + x_1^k (x_2^k)^3 - 9 \\ 3(x_1^k)^2 x_2^k - (x_2^k)^3 - 4 \end{bmatrix}$$

10. Tag ett steg av Newtons metod för problemet:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1 x_2 = 1. \end{cases}$$

<u>Lösning:</u>

För system $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1 x_2 = 1. \end{cases}$ har vi för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod (1) för $x = (x_1, x_2)^T$ blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k & -2x_2^k \\ 2x_2^k & 2x_1^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 - (x_2^k)^2 \\ 2x_1^k x_2^k - 1 \end{bmatrix}$$

För $x^0 = (0, 1)^T$ Newtons metod är:

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

11. Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration, $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis-skiss för att vi får linjär konvergens om $g'(x^*) \neq 0$.

Lösning:

Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(\Theta_k)(x_k - x^*) \right) - x^* \\ &= \underbrace{g'(\Theta_k)}_{\neq 0}(x_k - x^*), \quad \Theta_k \in (x^*, x_k) \end{aligned}$$

så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = |g'(\Theta_k|.$$

Om g är tillräckligt snäll kommer $g'(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har minst linjär konvergens som konvergerar mot $g'(x^*) \neq 0$.

12. Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration, $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis-skiss för att vi får kvadratisk konvergens om $g'(x^*) = 0$.

Lösning:

Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \right) - x^* \\ &= \underbrace{g'(x^*)}_{0}(x_k - x^*) + \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2, \quad \Theta_k \in (x^*, x_k) \end{aligned}$$

så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(\Theta_k|)}{2}$$

Om g är tillräckligt snäll kommer $g''(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har minst kvadratisk konvergens.

13. Vi studerar Newtons med fix riktning (modifierad Newton):

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/d.$$

a) Vad måste d uppfylla för att metoden skall vara lokalt konvergent? b) Vad blir, i allmänhet, konvergensordningen? c) Finns det något värde på d så att vi fortfarande får kvadratisk konvergens?

Lösning:

a) $g(x) = x - f(x)/d, x_{k+1} = g(x_k)$. x^* är en fixpunkt, ty $g(x^*) = x^* - f(x^*)/d = x^*$ och $f(x^*) = 0$.
$g'(x) = 1 - f'(x)/d$,
För konvergensen vi ska ha $|g'(x^*)| = |1 - f'(x^*)/d| < 1$. Ett sätt att skriva detta är $|d - f'(x^*)|/|d| < 1$, d måste alltså likna $f'(x^*)$ i denna relativa mening.
b) Vi kommer normalt att få linjär konvergens. Se föregående övning.
c) Om $d = f'(x^*)$ har vi minst kvadratisk konvergens, ty $g'(x^*) = 1 - f'(x^*)/d = 0$. Se föregående övning.

14. Vi vill lösa $x^2 - x - 2 = 0$ och studerar följande fixpunktsiterationer:
a) $g_1(x) = x^2 - 2$,
b) $g_2(x) = \sqrt{x+2}$,
c) $g_3(x) = 1 + 2/x$,
d) $g_4(x) = (x^2+2)/(2x-1)$.
Analysera konvergensen mot $x = 2$.

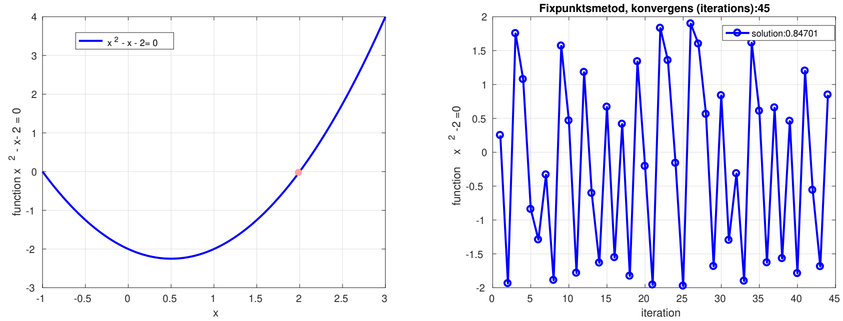
Lösning:

Alla funktionerna har $(2, -1)$ som fixpunkter. Räknar fixpunkter:
a) $x^* = g_1(x^*) \to x^* = (x^*)^2 - 2 \to (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \to x^*_{1,2} = 2; -1$;
b) $x^* = g_2(x^*) = \sqrt{x^* + 2} \to (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \to x^*_{1,2} = 2; -1$;
c) $x^* = g_3(x^*) = 1 + 2/x^* \to (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \to x^*_{1,2} = (2; -1)$.
Vi ska analysera konvergensen mot $x = 2$. Det återstår att undersöka derivatorna.
a) $g_1' = 2x, |g_1'(2)| = 2^2 = 4 > 1$ -ingen konv.
b) $g_2' = 1/(2\sqrt{x+2}), |g_2'(2)| = (1/2)/\sqrt{2+2} = 1/4 < 1$. Konvergent.
c) $g_3' = -2/x^2, |g_3'(2)| = 1/2$. Konvergent.
d) $|g_4'(x)| = (x^2+2)'(2x-1) - (x^2+2)(2x-1)'/(2x-1)^2 = (2x(2x-1) - 2(x^2 + 2))/(2x-1)^2$, så $|g_4'(2)| = 0$. Konvergent.

15. Försök att hitta så många rötter som möjligt till systemet med hjälp av Newtons metod:
$$\begin{cases} \sin(x) + y^2 + \log(z) = 3, \\ 3x + 2^y - z^3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^3 = 6. \end{cases}$$

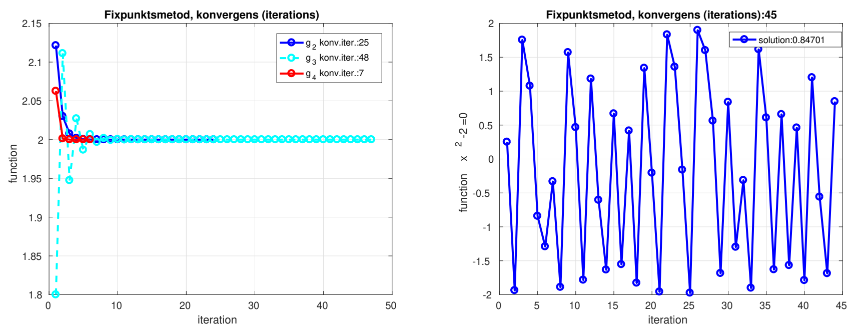
Lösning:

Newtons metod blir:



a) exakt $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ b) g_1

Fig. 4 *Övning 14. Exakt* $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ *och konvergenshastigheterna för* g_1 *med* $x_0 = 1.5, tol = 10^{-15}$. *Vi ser att* g_1 *är divergent.*



a) konvergens för g_2, g_3, g_4 b) divergense för g_1

Fig. 5 Övning 14. Konvergenshastigheterna för $g_i, i = 2,3,4$ med $x_0 = 2.5, tol = 10^{-15}$. Vi ser att g_1 är divergent, g_2 och g_3 konvergerar linjärt, g_4 slutligen är kvadratiskt konvergent.

$$
\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos x^k & 2y^k & \frac{1}{z^k} \\ 3 & 2^{y^k} \ln 2 & -3(z^k)^2 \\ 2x^k & 2y^k & 3(z^k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot f^k,
$$

var

$$
f^k = \begin{bmatrix} \sin x^k + (y^k)^2 + \log z^k - 3 \\ 3x^k + 2^{y^k} - (z^k)^3 \\ (x^k)^2 + (y^k)^2 + (z^k)^3 - 6 \end{bmatrix}.
$$

Om man väljer olika startpunkter (x^0, y^0, z^0) - kan man få flera olika rötter, testa i MATLAB !