Övningar MMG410: interpolation

Larisa Beilina, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

L. Beilina
Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

1. Givet de tre punkterna $(-1,2)$, $(0,3)$ och $(1,6)$, bestäm interpolationspolynomet av grad 2:
a) med basfunktioner $t_i^j,\ i=1,2,3, j=0,1,2$ (Vandermontes form).
b) på Lagranges form,
c) på Newtons form.
Visa slutligen att vi får samma polynom i de tre fallen.

Lösning:

a) Med basfunktioner $t_i^j,\ i=1,2,3, j=0,1,2$ konstruerar vi Vandermontes matrisen. Ansätt $p(t)=x_1+x_2t+x_3t^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så $p(t)=3+2t+t^2$.

b) Polynom på Langranges form i 3 punkter är:

$$p(t)=y_1\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}+y_2\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}+y_3\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

I vårt fall har vi:

$$p(t)=2\frac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)}+3\frac{(t-(-1))(t-1)}{(0-(-1))(0-1)}+6\frac{(t-(-1))(t-0)}{(1-(-1))(1-0)}$$

Förenklar vi detta uttryck får vi $p(t)=3+2t+t^2$.
c) Polynom på Newtons form i 3 punkter är:

$$p(t)=x_1+x_2(t-t_1)+x_3(t-t_1)(t-t_2)$$

och i vårt fall:

$$p(t)=x_1+x_2(t-(-1))+x_3(t-(-1))(t-0)$$

Observera:

$$\begin{aligned} y_1 &= p(t_1)=x_1+x_2(t_1-t_1)+x_3(t_1-t_1)(t_1-t_2)=x_1, \\ y_2 &= p(t_2)=x_1+x_2(t_2-t_1)+x_3(t_2-t_1)(t_2-t_2)=x_1+x_2(t_2-t_1), \\ y_3 &= p(t_3)=x_1+x_2(t_3-t_1)+x_3(t_3-t_1)(t_3-t_2). \end{aligned}$$

Vi får det undertriangulära systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi får: $x = [2, 1, 1]^T$ och interpolationspolynom på Newtons form är

$$p(t) = x_1 + x_2(t+1)) + x_3(t+1)t = 2 + (t+1)) + (t+1)t = 3 + 2t + t^2.$$

2. Finn $p(t)$ i Newtons form som interpolerar funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 4$, i punkter: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$.

Lösning:

Polynom i Newtons form för 4 punkter är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + x_4(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3).$$

Polynom som interpolerar funktionen $f(t) = t^3$ på $1 \leq t \leq 4$, i punkter: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t-1) + x_3(t-1)(t-2) + x_4(t-1)(t-2)(t-3).$$

Observera:

$$\begin{aligned}
1 = t_1^3 &= p(t_1) = x_1 + x_2(t_1 - t_1) + x_3(t_1 - t_1)(t_1 - t_2) = x_1, \\
8 = t_2^3 &= p(t_2) = x_1 + x_2(t_2 - t_1) + x_3(t_2 - t_1)(t_2 - t_2) = x_1 + x_2(t_2 - t_1), \\
27 = t_3^3 &= p(t_3) = x_1 + x_2(t_3 - t_1) + x_3(t_3 - t_1)(t_3 - t_2), \\
64 = t_4^3 &= p(t_4) = x_1 + x_2(t_4 - t_1) + x_3(t_4 - t_1)(t_4 - t_2) + x_4(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3).
\end{aligned}$$

Vi får det undertriangulära systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) & 0 \\ 1 & (t_4 - t_1) & (t_4 - t_1)(t_4 - t_2) & (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \\ 64 \end{bmatrix}.$$

Vi får: $x = [1, 7, 6, 1]^T$ och interpolationspolynom på Newtons form är

$$\begin{aligned}
p(t) = x_1 + x_2(t-1) + x_3(t-1)(t-2) + x_4(t-1)(t-2)(t-3) = \\
1 + 7(t-1) + 6(t-1)(t-2) + 1(t-1)(t-2)(t-3).
\end{aligned}$$

3. Hur beräknar vi $p(t) = 5t^3 - 3t^2 + 7t - 2$ med hjälp av Horners metod?

Lösning:

Horner's method för $p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 = x_1 + t(x_2 + t(x_3 + t x_4)).$$

I vårt fall Horners metod är:

$$p(t) = -2 + 7t - 3t^2 + 5t^3 = -2 + t(7 + t(-3 + 5t)).$$

4. Vi vill interpolera $(t_k, y_k), k = 1, ..., n$ med $n-1$ styckvis kvadratiska polynom sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k). Hur många kontinuerliga derivator kan vi rimligtvis kräva av interpolanten?

   Lösning:

   Delpolynom är andragradspolynom, och vi kan kräva 1 kontinuerligt derivata (förstaderivatan är kontinuerlig).
5. Transformera Chebyshevpunkterna

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],\ k = 1, 2, ..., n, t_k \in [-1, 1]$$

   från intervalet $[-1, 1]$ till intervalet $[\alpha, \beta]$.

   Lösning:

   När t ligger i ett annat intervall, $[\alpha, \beta]$ får vi göra en linjär avbilding $kt + b$ av Chebyshevpunkterna $[-1, 1]$ till detta intervall $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} k \cdot (-1) + b &= \alpha, \\ k \cdot 1 + b &= \beta, \end{aligned}$$

   då

$$\begin{aligned} b &= \alpha + k, \\ k \cdot 1 + \alpha + k &= \beta, \end{aligned}$$

   och från andra ekvation i systemet ovan har vi

$$\begin{aligned} k &= \frac{\beta - \alpha}{2}, \\ b &= \alpha + k = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}, \end{aligned}$$

   och linjär avbilding av Chebyshevpunkterna till intervall $[\alpha, \beta]$ är:

$$kt_k + b = \frac{\beta - \alpha}{2} \underbrace{t_k}_{[-1,1]} + \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{1}$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],\ k = 1,2,...,n$$

blir

$$-\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

6. Vi bestämmer interpolationspolynomet, p_n, på $[0,1]$ som interpolerar e^t i punkterna $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$. Visa att oavsett hur vi väljer t_k-punkterna (i övrigt) så gäller:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}|e^t - p_n(t)| = 0.$$

Visa att om vi väljer Chebyshevpunkterna så gäller att:

$$\max_{0\le t\le 1}|e^t - p_n(t)| \le \frac{e}{n!2^{2n-1}}.$$

Lösning:

Vi vet att

$$\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{f(t)}_{exakt} = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)$$

där $\theta \in (t, t_1, t_2, ..., t_n)$. Vi vet att $(e^t)^{(n)} = e^t$ och $|t - t_k| \le 1$ då

$$\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{e^t}_{exakt} = \frac{e^t(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}. \tag{2}$$

eftersom $|t - t_k| \le 1$.
Observera att det ger oss ett konvergensresultat för varje funktion vars alla derivator är begränsade på $[0,1]$, så $|f^{(n)}(t)| \le M, 0 \le t \le 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}|e^t - p_n(t)| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n!} = 0.$$

Vi redan vet att Chebyshevpunkterna minimerar $\prod_{k=1}^n |t - t_k|$ när $|t| \le 1$ och maximala värdet på $|(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)|$ är då $1/2^{n-1}$. Nu har vi intervallet $[0,1]$ och vi får transformera punkterna c_k med hjälp av (1) så att

$$\begin{aligned} t_k = kc_k + b &= \frac{\beta-\alpha}{2}\underbrace{c_k}_{[-1,1]} + \frac{\alpha+\beta}{2} \\ &= \frac{1-0}{2}c_k + \frac{0+1}{2} = \frac{c_k+1}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Från (3) vet vi att $c_k = 2t_k - 1$ då $t_k = \frac{c_k+1}{2}$ och

$$
\begin{aligned}
\max_{0\le t\le 1}\prod_{k=1}^{n}|t-t_k| &= \max_{0\le t\le 1}\prod_{k=1}^{n}\left|t-\frac{c_k+1}{2}\right| \\
&= \max_{0\le t\le 1}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{\underbrace{2t-1}_{c}-c_k}{2}\right| = \frac{1}{2^n}\max_{-1\le c\le 1}\prod_{k=1}^{n}|c-c_k| = \frac{1}{2^{2n-1}}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Nu använder vi (4) i (2) för att få

$$
\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}|\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{e^t}_{exakt}| = \lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\frac{e}{n!2^{2n-1}} = 0.
$$

7. En kubisk spline kan skrivas $p_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$ på intervallet $[t_k, t_{k-1}]$. Antag att vi har n stycken t-värden. Detta ger $n-1$ intervall (lika många polynom), så antalet obestämda koefficienter är $4(n-1)$. Hur många villkor har vi?

Lösning:

Interpolationskravet ger $2(n-1)$ villkor (ty varje polynom måste interpolera 2 knutpunkter). Detta ger oss kontinuiteten. Kontinuerlig förstaderivata ger $n-2$ villkor (inre punkter) och lika många för andraderivatan. Så summa för villkor blir:

$$
2(n-1)+n-2+n-2 = 4n-6.
$$

Eftersom

$$
\underbrace{4(n-1)}_{obestämda\ koeff.} \neq \underbrace{4n-6}_{villkor}
$$

då det innebär att vi saknar två villkor som måste bestämmas på något sätt. Här är några vanliga tilläggsvillkor (s är splinefunktionen):

- $s''(t_1) = s''(t_n) = 0$ s.k. naturliga splines (minimerar $\int_{t_1}^{t_n}(s''(t))^2 dt$)
- $s'(t_1) = f'(t_1)$ och $s'(t_n) = f'(t_n)$ komplett spline
- $s'(t_1) = s'(t_n)$ samt $s''(t_1) = s''(t_n)$ periodisk första- och andraderivata (kanske rimligt med $y_1 = y_n$ i detta fall)
- $p_1(t) = p_2(t),\ t \in [t_1, t_3]$ och $p_{n-2}(t) = p_{n-1}(t),\ t \in [t_{n-2}, t_n]$, not-a-knot; medför att s''' kontinuerlig i $t = t_2$ och $t = t_{n-1}$. Det är alltså ett tredjegradspolynom i $[t_1, t_3]$ (och ett (annat) i $[t_{n-2}, t_n]$).

8. Skriv kubisk spline för 3 punkter t_1, t_2, t_3.

Lösning:

En kubisk spline för 3 punkter t_1, t_2, t_3 kan skrivas som:

$$p_1(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3, \tag{5}$$
$$p_2(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 t^3. \tag{6}$$

Koefficienterna $\alpha_i, \beta_i, i = 1,2,3,4$ (8 koefficienter) ska bestämmas. Interpolationskravet ger 4 villkor (1)-(4) (ty varje polynom måste interpolera 2 knutpunkter), som ger oss kontinuiteten:

- (1)
$$p_1(t_1) = y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t_1 + \alpha_3 t_1^2 + \alpha_4 t_1^3$$
- (2)
$$p_1(t_2) = y_2 = \alpha_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_2^2 + \alpha_4 t_2^3$$
- (3)
$$p_2(t_2) = y_2 = \beta_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_2^2 + \beta_4 t_2^3,$$
- (4)
$$p_2(t_3) = y_3 = \beta_1 + \beta_2 t_3 + \beta_3 t_3^2 + \beta_4 t_3^3$$

Kontinuerlig förstaderivata $p_1'(t), p_2'(t)$ ger 1 villkor (inre punkt)

$$p'_1(t_2) \in C \Longrightarrow p'_1(t_2) = p'_2(t_2)$$

och lika många för andraderivatan:

$$p''_1(t_2) \in C \Longrightarrow p''_1(t_2) = p''_2(t_2).$$

- (5) $p'_1(t_2) \in C \Longrightarrow p'_1(t_2) = p'_2(t_2)$
$$p'_1(t) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t + 3\alpha_4 t^2$$
$$p'_2(t) = \beta_2 + 2\beta_3 t + 3\beta_4 t^2$$

  $p'_1(t_2) = p'_2(t_2)$:
$$p'_1(t_2) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t_2 + 3\alpha_4 t_2^2 =$$
$$= \beta_2 + 2\beta_3 t_2 + 3\beta_4 t_2^2 = p'_2(t_2)$$
- (6) $p''_1(t_2) \in C \Longrightarrow p''_1(t_2) = p''_2(t_2)$
$$p''_2(t) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t$$
$$p''_1(t) = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t$$
$$p''_2(t_2) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t_2 =$$
$$= 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t_2 = p''_1(t_2)$$

Så vi har $4+2=6$ villkor (1)-(4), (5)-(6), behöver 2 till (vi har 8 koefficienter, som ska bestämmas). Vi väljer följande 2 tillägsvillkor: $p''_1(t_1)=0; p''_2(t_3)=0$:

$$
\begin{aligned}
2\alpha_3 + 6\alpha_4 t_1 &= 0,\\
2\beta_3 + 6\beta_4 t_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

9. Definera splinefunktion av grad 1 som interpolerar $(t_1,y_1),(t_2,y_2),(t_3,y_3)$ och som består av styckvisa polynom av grad 1 på intervallen $[t_1,t_2],[t_2,t_3]$.

   Lösning:

   Splinefunktion av grad 1 för 3 punkter $(t_1,y_1),(t_2,y_2),(t_3,y_3)$ kan skrivas som:

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad t \in [t_1,t_2] &\quad (7)\\
p_2(t) &= \beta_1 + \beta_2 t. \quad t \in [t_2,t_3]. &\quad (8)
\end{aligned}
$$

   Fyra koefficienterna $\alpha_i, \beta_i, i=1,2$ ska bestämmas.
   Interpolationskravet ger $2(n-1)$ villkor (ty varje polynom måste interpolera 2 knutpunkter). Detta ger oss kontinuiteten. Vi ska inte ha villkor för derivator eftersom vi ska definera splinefunktion av grad 1. Så vi har för 3 punkter: $2(n-1)=2(3-1)=4$ villkor och 4 koefficienterna $\alpha_i, \beta_i, i=1,2$ ska bestämmas från systemet:

$$
\begin{aligned}
p_1(t_1) &= y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t_1\\
p_1(t_2) &= y_2 = \alpha_1 + \alpha_2 t_2\\
p_2(t_2) &= y_2 = \beta_1 + \beta_2 t_2\\
p_2(t_3) &= y_3 = \beta_1 + \beta_2 t_3.
\end{aligned}
$$