Övningar MMG410: kvadratur

Larisa Beilina, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

L. Beilina
Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

1. Använd trapetsmetoden för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.

   Lösning:

   Trapetsmetoden:

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)),\ h = b-a$$

   Trapetsmetoden för $\int_0^1 f(x)dx$ är:

   $$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(1)+f(0))\cdot(1-0).$$

   I vårt fall vi har $f(x) = x^2$, då trapetsmetoden för $\int_0^1 x^2 dx$ ger oss:

   $$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{2}(1^2+0^2) = \frac{1}{2}.$$

2. Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för att beräkna integralen $\int_0^1 4x^3 dx$.

   Lösning:

   Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x)dx$ är:

   $$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

   I vårt fall vi har $f(x) = 4x^3$, då rektangelmetoden för $\int_0^1 4x^3 dx$ ger oss:

   $$\int_0^1 4x^3 dx \approx (1-0)f\left(\frac{1+0}{2}\right) = f(1/2) = 4\cdot(1/2)^3 = 1/2.$$

3. Använd Simpsons metod för att beräkna $\int_0^1 x^2 dx$.

   Lösning:

   Simpsons metod :

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

   Vi har: $a = 0, b = 1, f(x) = x^2, f(a) = a^2, f(0) = 0, f(b) = f(1) = 1^2 = 1, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f((0+1)/2) = f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$.

   $$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1-0}{6}[0+4\cdot 1/4+1] = 1/3.$$

4. Vi har följande kvadraturformel:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k)$$

där vi vet att vi approximerar $f(x)$ med polynom $p(x)$ som har polynomiella gradtalet minst ett. Visa att $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$.

Lösning:

Metoden är exakt för polynom av åtminstone grad noll (konstant polynom $p(x) = 1$). Då gäller:

$$1 = \int_0^1 1dx = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

5. Vi har en kvadraturformel $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$. Hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[7,10]$?

   Lösning:

   Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

   t ligger i ett intervall $[a,b]$, och x ligger på $[-1,1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

   Vi gör ett variabelbytte oh sätter $t = 1.5x + 8.5, dt = 1.5dx$, då integral $\int_7^{10} f(t)dt$ beräknas som

$$\begin{aligned}\int_7^{10} f(t)dt &= 1.5 \int_{-1}^{1} f\left(1.5x + 8.5\right)\ dx \\ &\approx 1.5\omega_1 f\left(1.5x_1 + 8.5\right) + 1.5\omega_2 f\left(1.5x_2 + 8.5\right).\end{aligned}$$

6. Hitta ω och x_k så att följande kvadraturformel får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad är detta gradtal?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{3} \omega f(x_k)$$

   Lösning:

   Vi approximerar $f(x)$ med polynom $p(x) = x^k$. Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0,1,...,m$ för maximalt m så att

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \sum_{j=1}^{n} w_j p(x_j) = w \sum_{j=1}^{n} p(x_j). \tag{1}$$

Vi beräknar först

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}. \qquad (2)$$

Vi använder (1) och (2) för $n = 3$ för att få:

$$\begin{aligned} 2 &= w(1+1+1), k = 0, \\ 0 &= w(x_1+x_2+x_3), k = 1, \\ 2/3 &= w(x_1^2+x_2^2+x_3^2), k = 2, \\ 0 &= w(x_1^3+x_2^3+x_3^3), k = 3. \end{aligned}$$

Från första ekvation får vi $w = 2/3$.Vi vet inte helt säkert hur många ekvationer, n, vi skall ställa upp. Tar vi för litet n kommer x_j att bero på parametrar och om vi tar för stort n blir systemet inte lösbart. Fyra ekvationer verkar dock lämpligt eftersom vi har fyra obekanta. Vi borde kunna anta att x_j uppvisar vissa symmetriegenskaper eftersom integrationsintervallet är symmetriskt kring nollan och det är rimligt att anta att $x_1 = -x_3, x_2 = 0$. Lösningen blir: $x_1 = -1/\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = 1/\sqrt{2}$. Kunde vi ha tagit $m = 4$? Vi använder (1) och (2) för $n = 4$ för att få:

$$2/5 \neq w(x_1^4+x_2^4+x_3^4) = 1/3.$$

Från andra sidan, med $x_1 = -1/\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = 1/\sqrt{2}, w = 2/3$ får vi $w(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) = 1/3$, och då $2/5 \neq 1/3$. Det betyder att metoden är exakt för polynom upp till och med grad tre.

7. Välj w_1, w_2, x_1, x_2, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ?

$$\int_0^1 x^k dx = w_1 x_1^k + w_2 x_2^k, \;\; k = 0, 1, ..., m.$$

Lösning:

Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, ..., m$ för maximalt m. Vi beräknar först

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 = 1/(k+1). \qquad (3)$$

Vi använder (3) för att få:

$$
\begin{aligned}
1 &= w_1 + w_2, k = 0,\\
1/2 &= w_1 x_1 + w_2 x_2, k = 1,\\
1/3 &= w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, k = 2,\\
1/4 &= w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3, k = 3,\\
1/5 &= w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4, k = 4.
\end{aligned}
$$

Första ekvationen ger $w_{1,2} = 1/2$. Lös ut för $k = 1,2$ ekvationen $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$ (vi noterar, att $x_1 < x_2$) för att få $x_1 = \frac{1-1/\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1+1/\sqrt{3}}{2}$. Vi kollar nu fall $k = 3$. Utnyttjar vi binomialsatsen ser vi att $(1+c)^3 + (1-c)^3 = 2(1+3c^2)$ så att $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = (1/2^4) \cdot 2(1+3/3) = 1/4$, vilket är lika med det exakta värdet. Stämmer det för k = 4? Inte. Så, det polynomiella gradtalet är 3.

8. Vi vill beräkna
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 e^{-x^2} dx$$
med hjälp av Gausskvadratur med 3 vikter.

Lösning:

Metoden (Gausskvadratur med 3 vikter) är:
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{3/5}\right).$$

Vi transformerar interval $[0,3]$ för x, till $[-1,1]$ för t, med hjälp av följande linjär transformation:
$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2} = \frac{3-0}{2} t + \frac{3+0}{2}$$
och integral $\int_0^3 e^{-x^2} dx$ för $f(x) = e^{-x^2}$ kan beräknas som
$$
\begin{aligned}
\int_0^3 e^{-x^2} dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}\right) dt\\
&\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{3} \omega_i f\left(\frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2}\right)\\
&= \frac{3-0}{2} \cdot \left[\frac{5}{9} \cdot f\left(\frac{3-0}{2} t_1 + \frac{3+0}{2}\right)\right.\\
&\left. + \frac{8}{9} \cdot f\left(\frac{3-0}{2} t_2 + \frac{3+0}{2}\right) + \frac{5}{9} \cdot f\left(\frac{3-0}{2} t_3 + \frac{3+0}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$
i Gausspunkter
$$t_1 = -\sqrt{3/5}; t_2 = 0; t_3 = \sqrt{3/5}$$
med vikter
$$\omega_1 = 5/9; \omega_2 = 8/9; \omega_3 = 5/9.$$

9. Använd Taylorutveckling för att härleda första ordningen noggrannhet för

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4}$$

Lösning:

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(Q)h^2}{2!},$$

$Q \in [x, x+h]$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(Q)h^2}{2!}.$$

Dividera med h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(Q)h}{2!}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(Q)h}{2!}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Trunkeringsfel:

$$\frac{f''(Q)h}{2} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Låt $M \leq |f''(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med

$$\varepsilon < \frac{Mh}{2}.$$

Vi fick för $f'(x)$ första ordningen noggrannhet för approximation (4).

10. Använd Taylorutveckling för att härleda andra ordning noggrannhet för

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{5}$$

Lösning:

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$(*)\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(Q)h^3}{3!}$$

$$(**)\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - \frac{f'''(Q)h^3}{3!}$$

$(*)-(**)$:

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+2\frac{f'''(Q)}{3!}h^3$$

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-2\frac{f'''(Q)}{3!}h^3$$

Eller

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{2f'''(Q)h^3}{3!\cdot 2h}$$

Trunkeringsfel:

$$\frac{2f'''(Q)h^3}{3!\cdot 2h}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-f'(x).$$

Låt $M \le |f'''(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med

$$\varepsilon<\frac{Mh^2}{6}.$$

Vi fick andra ordningen noggrannhet för approximation (5).

11. Använd Taylorutveckling för att härleda andra ordning noggrannhet för

$$f''(x)\approx\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \tag{6}$$

Lösning:

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$(*)\ f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}-\frac{f'''(x)h^3}{3!}+\dots$$

$$(**)\ f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)h^2}{2!}+\frac{f'''(x)h^3}{3!}+\dots$$

$(*)+(**)$:

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+\frac{2f''(x)}{2!}h^2+O(h^4)$$

$$f''(x)=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-O(h^4)}{h^2}$$

$O(h^4)=\dfrac{2f^{(4)}(x)}{24}h^4$; $\dfrac{f^{(4)}(x)}{12}\dfrac{h^4}{h^2}=\dfrac{f^{(4)}(x)}{12}h^2 \longrightarrow$ Låt $M \le |f^{(4)}(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med $\varepsilon<\dfrac{Mh^2}{12}$, därför approximation (6) har andra ordningen noggrannhet.