Övningar MMG410: ordinära differentialekvationer

Larisa Beilina, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

L. Beilina
Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, SE-412 96 Gothenburg, Sweden, e-mail: larisa.beilina@chalmers.se

1. Sätt upp Eulers metod för problemet $y'(t) = t + 2y, y(0) = 1$ och beräkna $y_k, k = 0, 1, 2, 3$ med $\tau = 0.1$.

   Lösning: Explicit Eulers metod är:

   $y_{k+1} = y_k + \tau f(t_k, y_k), y_0 = y(t_0)$. I vårt fall $f(t, y) = t + 2y, t_0 = 0, y(t_0) = 1$ och vi får följande approximationer:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1, \\
y_1 &= y_0 + \tau f(t_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 2 \cdot 1) = 1.2, \\
y_2 &= y_1 + \tau f(t_1, y_1) = 1.2 + 0.1(0.1 + 2 \cdot 1.2) = 1.45, \\
y_3 &= y_2 + \tau f(t_2, y_2) = 1.45 + 0.1(0.2 + 2 \cdot 1.45) = 1.76.
\end{aligned}
$$

2. Tag två steg med framåt, eller explicit, Eulers metod för systemet:

$$
\begin{cases}
y_1'(t) = y_2, \\
y_2'(t) = t + y_1 + y_2 \\
y_1(0) = 1, \\
y_2(0) = 2.
\end{cases}
$$

   med $\tau = 0.1$.

   Lösning:

   Framåt, eller explicit, Eulers metod är:
   $y_{k+1} = y_k + \tau f(t_k, y_k), y_0 = y(t_0)$.
   I vårt fall: $t_0 = 0, y(t_0) = [y_1(t_0), y_2(t_0)]^T = [1, 2]^T$, $f(t, y) = [y_2, t + y_1 + y_2]^T$.
   Vi får följande approximationer:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= [1, 2]^T, \\
y_1 &= y_0 + \tau f(t_0, y_0) = [1, 2]^T + 0.1 \cdot [2, 0 + 1 + 2]^T = [1.2, 2.3]^T, \\
y_2 &= y_1 + \tau f(t_1, y_1) = [1.2, 2.3]^T + 0.1 \cdot [2.3, 0.1 + 1.2 + 2.3]^T = [1.43, 2.66]^T
\end{aligned}
$$

3. Skriv om följande system ekvationer som ett första ordningens system:

$$
\begin{cases}
u'' = 2u'v' + v^2 + t, \\
v''' = u + v + v''u, \\
u(0) = 1,\ u'(0) = -1, \\
v(0) = 2,\ v'(0) = 3,\ v''(0) = -4.
\end{cases}
$$

Lösning:

Inför $y_1 = u$, $y_2 = u' = y_1'$, $y_3 = v$, $y_4 = v' = y_3'$ och $y_5 = v'' = y_4'$. Systemet blir

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2y_2y_4 + y_3^2 + t, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = y_5, \\ y_5' = y_1 + y_3 + y_5y_1, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = -1, \\ y_3(0) = 2, \\ y_4(0) = 3, \\ y_5(0) = -4. \end{cases}$$

4. Skriv om följande ekvationer som första ordningens system:

- a) $y'' = t + y + y', y(0) = 1, y'(0) = -1$
- b) $y''' = y'' + ty, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 3,$
- c) $y''' = y'' - 2y' + y - t + 1, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 3.$

Lösning:

- a) $y'' = t + y + y', y(0) = 1, y'(0) = -1$:
  Sätt $u_1 = y, u_2 = u_1' = y'$. Vi får systemet:
  $$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = t + u_1 + u_2, \\ u_1(0) = 1, u_2(0) = -1. \end{cases}$$
- b) $y''' = y'' + ty, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 3$:
  Sätt $y = u_1, y' = u_1' = u_2, y'' = u_2' = u_3$. Vi får systemet:
  $$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ u_3' = u_3 + tu_1 \\ u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 3. \end{cases}$$
- c) $y''' = y'' - 2y' + y - t + 1, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 3$:
  Sätt $y = u_1, y' = u_1' = u_2, y'' = u_2' = u_3$. Vi får systemet:
  $$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ u_3' = u_3 - 2u_2 + u_1 - t + 1, \\ u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 3. \end{cases}$$

5. Skriv om följande problem på standardform och sedan som första ordningens system:

$$\begin{cases} t^2 v''(t) & = t^3 + v(t)v'(t) + z'(t)z(t) + (w(t))^3, \\ \frac{z''(t)}{v(t)} & = z(t) + \frac{v'(t)+t}{v(t)} - w(t), \\ w'(t) & = 5v(t)z'(t) + w(t) + t, \\ v(-1) & = -0.1, \\ v'(-1) & = -0.1, \\ z(-1) & = -0.1, \\ z'(-1) & = -0.2, \\ w(-1) & = 0.5. \end{cases}$$

Lösning:

Först skriver vi om systemet på standardform:

$$\begin{cases} v''(t) & = t + \frac{v(t)v'(t)+z'(t)z(t)+(w(t))^3}{t^2}, \\ z''(t) & = z(t)v(t) + v'(t) + t - w(t)v(t), \\ w'(t) & = 5v(t)z'(t) + w(t) + t, \\ v(-1) & = -0.1, \\ v'(-1) & = -0.1, \\ z(-1) & = -0.1, \\ z'(-1) & = -0.2, \\ w(-1) & = 0.5. \end{cases}$$

Sätt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t), \\ x_2(t) &= v'(t), \\ x_3(t) &= z(t), \\ x_4(t) &= z'(t), \\ x_5(t) &= w(t). \end{aligned}$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= t + \frac{x_1(t)x_2(t)+x_3(t)x_4(t)+(x_5(t))^3}{t^2}, \\ x_3'(t) &= x_4(t), \\ x_4'(t) &= x_1(t)x_3(t) + x_2(t) + t - x_5(t)x_1(t), \\ x_5'(t) &= 5x_1(t)x_4(t) + x_5(t) + t, \\ x_1(-1) &= -0.1, \\ x_2(-1) &= -0.1, \\ x_3(-1) &= -0.1, \\ x_4(-1) &= -0.2, \\ x_5(-1) &= 0.5. \end{cases}$$

6. Sätt upp bakåt-Euler för problemet

$$y' = -y^2, y(0) = 1.$$

Formulera den ickelinjära ekvation som uppkommer för att beräkna y_{k+1} samt ställ upp Newtons metod för denna ekvation.

Lösning:

Bakåt Euler:

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = -(y^{k+1})^2$$

eller

$$y^{k+1} + h(y^{k+1})^2 = y^k.$$

För att lösa den ekvation vi använder Newtons metod: vi inför ny variabel $z = y^{k+1}$ och skriver om bakåt Eulers metod som:

$$z + hz^2 = y^k.$$

Newtons' metod för $f(z) = z + hz^2 - y^k$ blir:

$$z^{j+1} = z^j - \frac{f(z^j)}{f'(z^j)} = z^j - \frac{h(z^j)^2 + z^j - y^k}{2hz^j + 1}.$$

Här, j är iteration i Newtons metod.

7. Vilka lösningar har följande problem?

$$y' = 3/2y^{1/3}, y(0) = 0$$

Lösning:

Ekvationen är separabel. Löser vi på den på ett av de vanliga sätten, får vi:

$$\int \frac{dy}{y^{1/3}} = 3/2 \int dt$$

och

$$3/2 y^{2/3} = 3/2 t + const,$$

eller $y(t) = (t + 2/3 \cdot const)^{3/2}$.
Begynnelsevärdet ger $const = 0$ och då $y(t) = t^{3/2}$. Lösningen är inte entydig eftersom även $y(t) = 0$ är en lösning.

8. Eulers metod kan härledas på följande sätt:

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \ldots \approx y(t) + hy'(t) = y(t) + hf(t, y(t)).$$

vilket ger framåt Eulers metoden

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k).$$

Härled en högre ordningens metod genom att ta med nästa term i Taylorutvecklingen.

Lösning:

Approximera

$$y''(t) \approx \frac{y'(t) - y'(t-h)}{h}$$

så att

$$
\begin{aligned}
y(t+h) &\approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) && (1)\\
&= y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{y'(t) - y'(t-h)}{h} && (2)\\
&= y(t) + hf(t, y) + \frac{h}{2}(f(t, y) - f(t-h, y-h)) && (3)\\
&= y(t) + \frac{h}{2}(3f(t, y) - f(t-h, y-h)). && (4)
\end{aligned}
$$

Detta leder till metoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})),$$

som är andra ordningens flerstegsmetod.
En annan tänkbar approximation är t.ex.

$$y''(t) \approx \frac{y'(t+h) - y'(t)}{h}$$

så att

$$\begin{aligned}
y(t+h) &\approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) && (5)\\
&= y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{y'(t+h) - y'(t)}{h} && (6)\\
&= y(t) + hf(t,y) + \frac{h}{2}(f(t+h, y+h) - f(t,y)) && (7)\\
&= y(t) + \frac{h}{2}(f(t+h, y+h) + f(t,y)). && (8)
\end{aligned}$$

Detta leder till implicita flerstegsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)).$$

9. Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t) + 2t, \\ y'(t) = x(t) + y(t) + t + 1, \\ x(5) = 0. \\ y(5) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

<u>Lösning:</u>

Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
$v_{k+1} = v_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau}$ var $v_k = v(t_k), t_{k+1} = t_k + \tau$.
Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} & = 5x_{k+1} - 2y_{k+1} + 2t_{k+1}, \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} & = x_{k+1} + y_{k+1} + t_{k+1} + 1, \end{cases}$$

som kan skrivas om :

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k & = 5\tau x_{k+1} - 2\tau y_{k+1} + 2\tau(t_k + \tau), \\ y_{k+1} - y_k & = \tau x_{k+1} + \tau y_{k+1} + \tau(t_k + \tau) + \tau, \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x_{k+1} - 5\tau x_{k+1} + 2\tau y_{k+1} & = x_k + 2\tau(t_k + \tau), \\ -\tau x_{k+1} + y_{k+1} - \tau y_{k+1} & = y_k + \tau(t_k + \tau) + \tau. \end{cases}$$

För att hitta x_{k+1}, y_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [x_{k+1}, y_{k+1}]^T$, känt vektor $b = [x_k + 2\tau(t_k+\tau), y_k + \tau(t_k+\tau)+\tau]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1-5\tau & 2\tau \\ -\tau & 1-\tau \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi : $[x_0, y_0]^T = [x(t_0), y(t_0)]^T = [x(5), y(5)]^T = [0,0]^T$. Första iteration i Bakåt-Eulers metod ska vara:

$$[x_1, y_1]^T = A^{-1}[x_0 + 2\tau(t_k+\tau), y_0 + \tau(t_k+\tau)+\tau]^T = A^{-1}[2\tau(5+\tau), \tau(5+\tau)+\tau]^T.$$

10. Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(x(t)) + 2t, \\ x'(t) = \cos(y(t)) - 2tx(t), \\ y(0) = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Lösning:

Explicit, eller Framåt-Eulers metod är:
$v_{k+1} = v_k + \tau f(t_k, v_k)$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1}-v_k}{\tau}$.
Framåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau} &= \sin(x_k) + 2t_k; \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{\tau} &= \cos(y_k) - 2t_k x_k. \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \tau(\sin(x_k) + 2t_k), \\ x_{k+1} &= x_k + \tau(\cos(y_k) - 2t_k x_k). \end{aligned}$$

Första iteration i den för $k = 0, t_0 = 0, y_0 = y(t_0) = y(0) = 0, x_0 = x(t_0) = 0$ ska vara:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \tau(\sin(x_0) + 2t_0) = 0 + \tau(0 + 2\cdot 0) = 0; \\ x_1 &= x_0 + \tau(\cos(y_0) - 2t_0 x_0) = 0 + \tau(1 - 2\cdot 0) = \tau. \end{aligned}$$

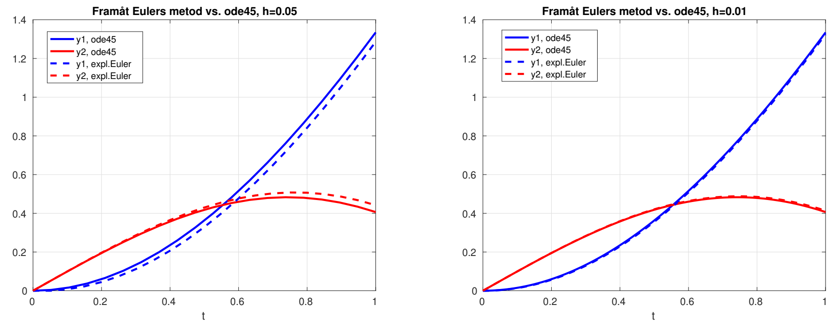

Fig. 1 *Framåt-Eulers metod versus ode45 för lösning av system* (10) *a) med* $h = 0.05$*; b) med* $h = 0.01$.