

LABORATION 2

2.1 MINSTAKVADRATPROBLEM

2.1.1 GREVE RUMFORDS EXPERIMENT

I den här uppgiften skall vi anpassa mätdata till en enkel fysikalisk modell. Greve Rumford utförde 1798 följande experiment. Ett kanonrör uppvärmdes till 130 F genom att en trubbig borrh vreds runt av hästar i 30 minuter. Sedan fick röret svalna medan man då och då mätte temperaturen T i röret. Man fick följande mätserie:

t (min)	4	5	7	12	14	16	20	24	28	31	34	37.5	41
T (F)	126	125	123	120	119	118	116	115	114	113	112	111	110

Den omgivande temperaturen T_{omg} uppmättes till 60 F. Med denna informationen kan vi beräkna temperatursutvecklingen med hjälp av Newtons avsvlningslag,

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\beta(T(t) - T_{omg})$$

där β är värmekapaciteten. Vårt mål att är att bestämma β för kanonen utifrån mätdata. Vi skall använda tre metoder.

1. Differentialekvationen ovan har lösningen

$$T(t) = T_{omg} + (T_0 - T_{omg})e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Skriv om den här ekvationen som ett *linjärt* problem i den okända parametern β . Det vill säga, gör en omskrivning med hjälp av logaritmlagarna så att vi får ett problem på formen

$$A(t)\beta = b(T),$$

där $A(t)$ är en funktion av enbart t och $b(T)$ är en funktion av enbart T . Använd sedan `\`-rutinen i Matlab för att uppskatta β .

2. Använd Matlab-rutinen `lsqnonlin` för att lösa det icke linjära problemet

$$\min_{\beta} \|T - (T_{omg} + (T_0 - T_{omg})e^{-\beta t})\|_2^2.$$

`lsqnonlin` kräver att man ger en första gissning β_0 på vad β kan vara. Vad är ett rimligt val av β_0 här?

3. Ovanstående approximationer stämmer inte så bra (om ni plottar upp mätvärden och approximationer). Kanske har några värden blivit fel avskrivna (något kan ha tappats bort under de 200 år sedan experimentet utfördes). Antag nu att den omgivande temperaturen T_{omg} var felaktigt avskriven. Använd `lsqnonlin` för att lösa det icke linjära problemet

$$\min_{\beta, T_{omg}} \|T - (T_{omg} + (T_0 - T_{omg})e^{-\beta t})\|_2^2.$$

Plotta slutligen samtliga versioner av $T(t)$ samt mätdata i samma diagram. Vilken modell kan man betrakta som mest realistisk i det långa loppet?

2.1.2 ANPASSNING AV EN POTENSFUNKTION TILL MÄTDATA

Vi skall nu anpassa en potenslag (engelska *power law*) $y = ax^b$ efter mätdata. Mätdata är given som

```
x = [1.000e-03
      1.584e-02
      2.511e-01
      3.981e+00
      6.309e+01
      1.000e+03];
y = [3.155e-04
      1.787e-02
      3.475e-01
      9.596e+00
      5.388e+02
      7.147e+03];
```

Vi skall alltså bestämma parametrarna a och b . Vi gör detta återigen med hjälp av tre olika metoder.

1. Bestäm a och b genom att logaritmera och sedan lösa ett *linjärt* minstakvadratproblem.
2. Använd `lsqnonlin` för att lösa det icke-linjära problemet

$$\min_{a,b} \|ax^b - y\|_2^2.$$

3. Använd `lsqnonlin` för att lösa det icke-linjära problemet

$$\min_{a,b} \left\| \frac{ax^b}{y} - 1 \right\|_2^2.$$

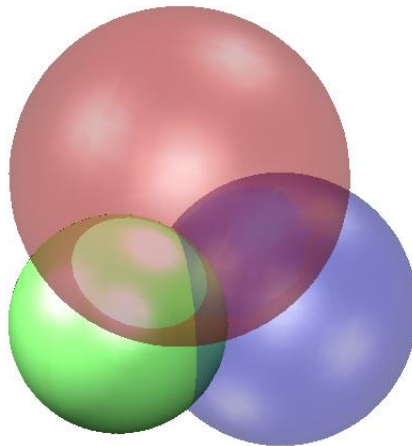
Beräkna också storleken på residualen i samtliga fall. Det vill säga, om (`a_approx`, `b_approx`) är de tal som ni har funnit med hjälp av minstakvadrat-metoden eller `lsqnonlin`, beräkna hur mycket eran uppskattning skiljer sig ifrån mätdata genom att skriva

```
approx = a_approx*x.^b_approx;
res     = norm(y-approx)
```

- Vilken uppskattning är bäst i det här avseendet?
- Plotta slutligen mätdata och dina tre uppskattade potensfunktioner i samma `loglog`-diagram.
- Kan man fortfarande säga att den uppskattningen med lägst residual var den som bäst anpassades till data?

2.2 SYSTEM AV ICKE-LINJÄRA EKVATIONER

Syftet med denna laboration är att ni ska lära er att ställa upp Newtons metod för ett system av ekvationer. Antag att vi har tre stycken sändare med känd position. Exempelvis kan de sitta på toppen av varsin radiomast. Var och en av sändarna kommunicerar med en mottagare som befinner sig någonstans i $\mathbb{R}^3$. Vi vet hur långt mottagaren befinner sig ifrån vart och en av de tre sändarna. Vårt mål är att ta fram exakt vilken punkt mottagaren befinner sig på. Problemet kan illustreras med figuren nedan.



En illustration av problemet att finna mottagarens position. I mitten av vart och en av de tre sfärerna sitter en sändare. Vi vet att mottagaren befinner sig på ett avstånd r_1 från sändare ett, r_2 från sändare två och r_3 från sändare tre. De tre sfärerna har radie r_1 , r_2 respektive r_3 . Det innebär att mottagaren befinner sig någonstans där de tre sfärerna skär varandra.

- Som första uppgift skall ni bestämma hur många lösningar problemet kan tänkas ha.
- Formulera sedan det ekvationssystem som behöver lösas för att hitta mottagarens position. Antag att den k :te sändaren har mittpunkt i (x_k, y_k, z_k) och befinner sig på avståndet r_k från mottagaren, $k = 1, 2, 3$. Kalla mottagarens koordinater för $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.
- Skriv om ekvationssystemet i uppgift 2 på formen $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ och skriv en **while**-sats som utför Newtons metod för problemet,

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - J^{-1}(\mathbf{p}_n)\mathbf{f}(\mathbf{p}_n).$$

Här skall ni bestämma Jacobianen J för hand genom att derivera $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ med avseende på $\mathbf{p}$. Som bekant är Newtons metod en algoritm som hittar nollställen till system av ekvationer. Algoritmen är klar när två successiva gissningar $\mathbf{p}_{n+1}$ och $\mathbf{p}_n$ befinner sig en tolerans ε ifrån varandra. Sätt $\varepsilon = 10^{-5}$ och använd följande data för sändarnas positioner:

```
x = [ 1.23, 0.12, -0.22]'; % x-koordinaterna for sandarna
y = [ 0.01, 0.98, 0.02]'; % y-koordinaterna for sandarna
z = [-0.11, -0.12, 1.76]'; % z-koordinaterna for sandarna
r = [ 1.22, 0.98, 1.52]'; % avstanden mellan sandare och mottagare
```

Testa följande tre punkter som $\mathbf{p}_0$:

```
p1 = zeros(3, 1);
p2 = ones(3, 1),
p3 = [3.407007110432360e-01
      3.907070706849901e-01
      4.758069306448354e-01];
```

- Får vi samma lösning för alla tre gissningar?
- Hur många iterationer krävs det för att hitta en lösning om vi börjar i $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ respektive $\mathbf{p}_3$?
- Om det är någon av initialgissningarna som sticker ut, kan ni förklara *varför* det händer?

INLÄMNING

Skicka era svar på de samtliga frågor markerade i punktlistorna ovan som en pdf via Canvas, se deadline i CANVAS. Glöm inte att bifoga väl kommenterad kod till varje uppgift. Koden skall bifogas som en enda m-fil vid namn **namn1_namn2_MMG410Lab2.m**, och varje uppgift skall uppta en egen cell i filen.