Algebraiska strukturer, 18 februari

NORMALA DELGRUPPER

En delgrupp N till en grupp G är **normal** om $gng^{-1} \in N$ för alla $n \in N$ och alla $g \in G$. Vi skriver $N \triangleleft G$.

Obs! I an abelsk grupp är alla delgrupper normala, ty $gng^{-1} = ngg^{-1} = n \in N$ för alla $g \in G$ och alla $n \in N$.

Övning. Visa att N är en normal delgrupp till en grupp G omm $gN = Ng$ för alla $g \in G$, dvs vänster- och högersidoklasser är lika.

Exempel. 1. Låt $G = S_3$, $N = \langle(1,2)\rangle = \{(1),(1,2)\}$ och $g = (2,3)$. Då är

$$Ng = \{(2,3),(1,2,3)\}, \qquad gN = \{(2,3),(1,3,2)\}$$

varav följer att N inte är normal.

2. Låt $G = GL_n(\mathbb{R})$ (alla $n \times n$-matriser med determinant $\neq 0$ med matrismultiplikation). Låt $N = SL_n(\mathbb{R})$ (alla $n \times n$-matriser vars determinant är 1).

Övning. Visa att N är en delgrupp till G.

N är normal, ty

$$\det(ABA^{-1}) = \det A \det B (\det A)^{-1} = \det B = 1$$

för varje $A \in G$ och $B \in N$.

Sats 21.2 (31.2). Om $\theta : G \mapsto H$ är en grupphomomorfi så är $\ker\theta$ en normal delgrupp till G.

Bevis. $\ker\theta$ är en delgrupp enligt Sats 31.1. Om $g \in G$ och $n \in \ker\theta$ så har vi att

$$\theta(gng^{-1}) = \theta(g)\theta(n)\theta(g^{-1}) = \theta(g)e_H\theta(g)^{-1} = \theta(g)\theta(g)^{-1} = e_H$$

och därmed ligger gng^{-1} i $\ker\theta$.

KVOTGRUPPER

Låt N vara en normal delgrupp till en grupp G. Låt G/N beteckna mängden av alla högersidoklasser (ekvivalent, vänstersidoklasser). Vi kan definiera en operation på G/N så att G/N blir en grupp med avssende på denna operation.

Exempel. Hur definierade vi operationen $\oplus$ på $\mathbb{Z}_n$?

$\mathbb{Z}_n = \{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$. $[0] = \{nk, k \in \mathbb{Z}\} = \langle n\rangle$ är en delgrupp till $\mathbb{Z}$ (med addition) och $[r] = \langle n\rangle + r$, $r \in \mathbb{Z}$, är både höger- och vänstersidoklasser till $\langle n\rangle$ i $\mathbb{Z}$.

Likheten $[a] \oplus [b] = [a+b]$ kan vi skriva om som

$$(\langle n\rangle + a) \oplus (\langle n\rangle + b) = \langle n\rangle + (a+b).$$

Låt Na och $Nb \in G/N$ (additivt: $N+a$ och $N+b \in G/N$). Vi definierar en operation i G/N enligt

$$Na * Nb = N(ab) \quad (\text{additivt}: (N+a)*(N+b) = N+(a+b))$$

Lemma. Operationen $*$ är väldefinierad, dvs om $Ng_1 = Ng_2$ och $Nh_1 = Nh_2$ så är $Ng_1h_1 = Ng_2h_2$.

Bevis.

$Ng_1 = Ng_2 \Rightarrow g_1 \in Ng_2 \Rightarrow g_1 = n_1g_2$ för något $n_1 \in N$.

$Nh_1 = Nh_2 \Rightarrow h_1 \in Nh_2 \Rightarrow h_1 = n_2h_2$ för något $n_2 \in N$. Därmed gäller att

$$g_1h_1 = n_1g_2n_2h_2 = n_1g_2n_2g_2^{-1}g_2h_2.$$

Eftersom N är en normal delgrupp får vi att $g_2n_2g_2^{-1} = n_3$ för något $n_3 \in N$ och

$$g_1h_1 = n_1n_3g_2h_2$$

med $n_1n_3 \in N$ vilket visar att $g_1h_1 \in Ng_2h_2$ varav $Ng_1h_1 = Ng_2h_2$.

Sats 22.1 (32.1). Låt G vara en grupp och låt N vara en normal delgrupp till G. Då bildar G/N en grupp med avseende på operationen $*$. Denna grupp kallas för **kvoten av** G **med** H.

Bevis. Associativitet: Låt g_1, g_2, $g_3 \in G$. Då

$$(Ng_1 * Ng_2) * Ng_3 = Ng_1g_2 * Ng_3 = N(g_1g_2)g_3 =$$
$$= Ng_1(g_2g_3) = Ng_1 * Ng_2g_3 = Ng_1 * (Ng_2 * Ng_3)$$

Elementet $Ne = N$ är ett identitetselement, ty om $g \in G$ så är

$$Ne * Ng = N(eg) = Ng \text{ och } Ng * Ne = N(ge) = Ng.$$

Elementet Ng^{-1} är en invers till Ng, $g \in G$, ty

$$Ng * Ng^{-1} = Ngg^{-1} = Ne \text{ och } Ng^{-1} * Ng = Ng^{-1}g = Ne.$$

Alltså är G/N en grupp.

Om G är ändlig så är $o(G/N) = [G : N]$.

Exempel. $\mathbb{Z}/\langle n \rangle = \mathbb{Z}_n$.

FUNDAMENTALA HOMOMORFISATSEN FÖR GRUPPER

Om $\theta : G \to H$ är en grupphomomorfi med $\ker\theta = K$ är

$$G/K \approx Im\theta.$$

Dessutom, om θ är surjektiv så är $G/K \approx H$.

Bevis. Vi definierar $\Phi : G/K \mapsto Im\theta$ enligt

$$\Phi(Ka) = \theta(a).$$

- Φ är väldefinierad, dvs $Ka = Kb \Rightarrow \theta(a) = \theta(b)$: om $Ka = Kb$ så gäller $a \in Kb$ och $a = kb$ för något $k \in K$, varav

$$\theta(a) = \theta(kb) = \theta(k)\theta(b) = e_H\theta(b) = \theta(b).$$

- Φ bevarar operation:

$$\Phi(Ka * Kb) = \Phi(Kab) = \theta(ab) = \theta(a)\theta(b) = \Phi(Ka)\Phi(Kb).$$

- Φ är bijektiv: Φ avbidar hela G/K på hela $Im\theta$ och därmed är surjektiv; Φ är injektiv, ty

$$\begin{aligned}
&\Phi(Ka) = \Phi(Kb) \Leftrightarrow \theta(a) = \theta(b) \\
&(\text{ multiplicera med } \theta(a)^{-1} \text{ från höger}) \\
&\Leftrightarrow e_H = \theta(b)\theta(a)^{-1} = \theta(b)\theta(a^{-1}) = \theta(ba^{-1}) \\
&\Leftrightarrow ba^{-1} \in K(= \ker\theta) \Leftrightarrow b \in Ka \Leftrightarrow Kb = Ka.
\end{aligned}$$

Alltså är Φ en isomorfi och $G/K \approx Im\theta$.

Exempel.

- $\langle n\rangle$ är en normal delgrupp till $\mathbb{Z}$ och kvoten $\mathbb{Z}/\langle n\rangle$ är $\mathbb{Z}_n$.
- $SL_n(\mathbb{R})$ är en normal delgrupp till $GL_n(\mathbb{R})$ och kvoten $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ är (isomorf med) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (med multiplikation)

Vi har surjektiva homomorfier $\theta_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ($\theta_1(k) = [k],\ k \in \mathbb{Z}$) och $\theta_2 : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$ ($\theta_2(A) = \det A,\ A \in GL_n(\mathbb{R})$) med kärnor $\langle n\rangle$ respektive $SL_n(\mathbb{R})$.

Exempel. Definiera $\theta : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$ enligt $\theta([a]_{12}) = [a]_4$.

1. θ är en väldefinierad avbildning dvs definitionen av denna avbildning beror inte på heltalet a som definierar kongruensklassen:

$$[a]_{12} = [b]_{12} \Leftrightarrow 12|(a-b) \Rightarrow 4|(a-b) \Rightarrow [a]_4 = [b]_4.$$

2. θ är en homomorfi:

$$\theta([a]_{12}\oplus[b]_{12}) = \theta([a+b]_{12}) = [a+b]_4 = [a]_4\oplus[b]_4 = \theta([a]_{12})\oplus\theta([b]_{12})$$

3. θ är surjektiv.

4. Kärnan $\ker\theta$ består av alla kongruensklasser $[a]_{12}$ sådana att $\theta([a]_{12}) = [0]_4$, dvs $[a]_4 = [0]_4$ vilket betyder att $4|a$. Vi får alltså

$$\ker\theta = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\} = \langle [4]_{12}\rangle.$$

Enligt homomorfi satsen är

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle [4]_{12}\rangle \approx \mathbb{Z}_4.$$
