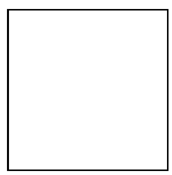
Algebraiska strukturer, 20 februari

GRUPPVERKNINGAR

Exempel 1. Låt X vara en kvadrat i planet och låt G bestå av alla transformationer av planet som bevarar avståndet och kvadraten. G bildar en grupp med avseende på sammansättningen av två transformationer (Varför?). Denna grupp kallas ofta **kvadrat-gruppen**. G består i detta fall av följande 8 transformationer: 4 vridningar v_1, v_2, v_3, v_4: 0°, 90°, 180°, 270° kring kvadratens mittpunkt och 4 speglingar i linjerna s_1, s_2, s_3, s_4.

Man kan beskriva dessa transformationer med hjälp av följande permutationer av kvadratens hörn 1, 2, 3, 4:

$$\pi_{v_1} = (1), \pi_{v_2} = (1,2,3,4), \pi_{v_3} = (1,3)(2,4), \pi_{v_4} = (1,4,3,2)$$
$$\pi_{s_1} = (1,2)(3,4), \pi_{s_2} = (1,4)(2,3), \pi_{s_3} = (2,4), \pi_{s_4} = (1,3)$$



Sammansättningen av två transformationer motsvarar sammansättningen av respektive permutationer. Vi säger att G verkar på kvadratens hörn 1, 2, 3, 4.

Låt G vara en grupp och låt S vara en mängd. $Sym(S)$ betecknar gruppen av alla bijektiva funktioner med sammansättningen av funktioner som operation.

G **verkar på** S om det finns en grupphomomorfi

$$G \to Sym(S)$$

dvs att det till varje $g \in G$ kan man ordna en bijektiv funktion $\pi_g : S \to S$ så att

$$\pi_{gh} = \pi_g \circ \pi_h \quad \text{för alla } g, h \in G.$$

Exempel 2. En grupp verkar på sig själv på tre naturliga sätt:

(i) $\pi_g(h) = gh$, (multiplikation till vänster)
(ii) $\pi_g(h) = hg^{-1}$, (multiplikation till höger)
(ii) $\pi_g(h) = ghg^{-1}$ (konjugering)

Bevis. Övning.

BANOR

Om G verkar på S får vi en ekvivalensrelation på S genom

$$x \sim y \Leftrightarrow \pi_g(x) = y, \text{ för något } g \in G.$$

- Ekvivalensklasserna till denna relation kallas **banor** (x och y ligger i samma bana omm det finns $g \in G$ sådant att $\pi_g(x) = y$).
- Den bana som innehåller x betecknas $Orb(x)$.
- Om det finns bara en bana sägs G verka **transitivt**.

Exempel 3. Delgruppen $\{v_1, v_3\}$ av kvadratgruppen verkar på $S = \{1,2,3,4\}$. Banorna är $Orb(1) = Orb(3) = \{1,3\}$ och $Orb(2) = Orb(4) = \{2,4\}$.

Delgruppen $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ verkar på $S = \{1,2,3,4\}$ med unik banan: $Orb(1) = Orb(2) = Orb(3) = Orb(4) = \{1,2,3,4\}$.

STABILISATOR

För varje $s \in S$ bildar $G_s = \{g \in G : \pi_g(s) = s\}$ en delgrupp till G som kallas **stabilisatorn** till s.

Exempel. Om G är kvadratgruppen och $S = \{1,2,3,4\}$ så är $G_1 = \{g \in G : \pi_g(1) = 1\} = \{v_1, s_3\}$, $G_2 = \{g \in G : \pi_g(2) = 2\} = \{v_1, s_4\}$, $G_3 = \{g \in G : \pi_g(3) = 3\} = \{v_1, s_3\}$, $G_4 = \{g \in G : \pi_g(4) = 4\} = \{v_1, s_4\}$.

Sats. Om en ändlig grupp G verkar på en mängd S och $s \in S$ så är

$$|Orb(s)| = [G : G_s] = \frac{|G|}{|G_s|}.$$

Bevis. Vi skall visa att elementen i $Orb(s)$ står i ett-ett-relation till sidoklasserna till G_s. För varje $s \in S$ har vi att

$$Orb(s) = \{\pi_g(s) : g \in G\}.$$

För g, $h \in G$ och $s \in S$ gäller att

$$\begin{aligned} \pi_g(s) = \pi_h(s) &\Leftrightarrow (\pi_h^{-1} \circ \pi_g)(s) = s \\ \Leftrightarrow (\pi_{h^{-1}} \circ \pi_g)(s) = s &\Leftrightarrow (\pi_{h^{-1}g})(s) = s \\ \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_s \Leftrightarrow g \in hG_s &\Leftrightarrow gG_s = hG_s \end{aligned}$$

Detta ger att antalet olika element i $Orb(s)$ är lika med antalet olika sidoklasser till G_s. Därför är $|Orb(s)| = [G : G_s] = \frac{|G|}{|G_s|}$ enligt Lagranges sats.

ANTALET BANOR

Burnsides lemma. Om G är en ändlig grupp som verkar på en ändlig mängd S ges antalet banor av

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{s\in S:\pi_g(s)=s\}|.$$

Bevis. Vi räknar antalet element i mängden

$$X=\{(g,s)\in G\times S:\pi_g(s)=s\}\subseteq G\times S.$$

Detta kan göras på två olika sätt:

$$|X|=\sum_{g\in G}|\{s\in S:(g,s)\in X\}|=\sum_{g\in G}|\{s\in S:\pi_g(s)=s\}|$$

och

$$|X|=\textstyle\sum_{s\in S}|\{g\in G:(g,s)\in X\}|=\sum_{s\in S}|\{g\in G:\pi_g(s)=s\}|=$$
$$\sum_{s\in S}|G_s|=\sum_{s\in S}\frac{|G|}{|Orb(s)|}=\sum_{\text{banor}}|G|=|G|\cdot|\{\text{banor}\}|.$$

Exempel 4. På hur många olika sätt kan man måla en kvadrat med k färger om två färgläggningar är lika om man får en av dem från den andra med hjälp av symmetriska transformationer?

Låt S vara mängden av alla färgläggningar av en kvadrat med given orientering. Då är $|S|=k^4$.

Kvadratgruppen G verkar på S. Om $s\in S$ är en färgläggning så består $Orb(s)$ av alla element som fås från s med hjälp av vridningar och speglingar. Därför är antalet olika färgläggningar (två färgläggningar är lika om man får en av dem från den andra med hjälp av symmetriska transformationer) lika med antalet banor då G verkar på S. Låt $\psi(g)=|\{s\in S:\pi_g(s)=s\}|$.

$\psi(v_1)=k^4$, ty v_1 är identiska transformationen och $\pi_{v_1}(s)=s$ för alla $s\in S$.

$\psi(v_2)=k$, eftersom en färgning s är invariant under v_2 omm alla sidor har samma färg.

$\psi(v_3)=k^2$, eftersom en färgning s är invariant under v_3 omm motsatta sidor ha samma färg.

$\psi(v_4)=k$ (samma argument som för v_2).

$\psi(s_1)=k^3$ (sidorna 14 och 23 måste ha samma färg).

$\psi(s_2)=k^3$ (samma argument som för s_1).

$\psi(s_3)=k^2$ (sidorna 12 och 14 måste ha samma färg och sidorna 23 och 34 måste ha samma färg).

$\psi(s_4)=k^2$ (liknande argument som för s_3).

Enligt Burnsides lemma får vi att antalet banor och därmed olika färgläggningar är lika med $(k^4+2k+3k^2+2k^3)/8$.