Bråkkroppar av integritetsområden (se avsnitt 30 i Durbins bok)

Låt D vare ett integritetsområde och $D' = D \setminus \{0\}$. Vi skall bilda bråk med element i D som täljare och element i D' som nämnare. Vi studerar därför relationen $\sim$ på $D \times D'$ där $(a, b) \sim (c, d)$ om och endast om $ad=bc$.

Lemma 30.1 *Relationen ~ är en ekvivalensrelationen på* $D \times D'$

Bevis $\sim$ är reflexitiv då $ab=ba$ och symmetrisk eftersom $ad=bc \Rightarrow cb=da$. För transitiviteten, låt $(a, b) \sim (c, d)$ och $(c, d) \sim (e, f)$. Då är $ad=bc$, $cf=de$ och $(ad)f = (bc)f = b(cf) = b(de)$. Alltså gäller i så fall $d(af)= d(be)$. Men då D saknar nolldelare kan vi stryka $d\neq 0$, vilket ger att $(a, b) \sim (e, f)$.

Vi betecknar ekvivalensklassen av (a, b) m.a.p. $\sim$ med $\frac{a}{b}$ istället för $[a, b]$ som i kursboken. Vi kallar en ekvivalensklass $\frac{a}{b}$ för ett bråk med element i D. Observera att $b\neq 0$ för varje par (a, b) som representerar bråket.

Låt F_D vara mängden av alla bråk med element i D. Man definierar summan och produkten av två bråk enligt :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \; .$$

Det är inte självklart att dessa operationer är väldefinierade och att högerleden är oberoende av de par (a,b) och (c,d) som representerar bråken. Men det följer av följande lemma.

Lemma 30.2 *Låt* $(a, b), (a', b'), (c, d), (c', d')$ *vara element i* $D \times D'$ *med* $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ *och* $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$. *Då är* $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ *och* $\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$.

För de binära operationerna + och $\cdot$ på F_D gäller följande resultat.

Lemma 30.3 *För ett integritetsområde D så är* $(F_D ,+, \cdot)$ *en kropp med* $\frac{0}{1}$ *som nollelement och* $\frac{1}{1}$ *som etta. Den additiva inversen till* $\frac{a}{b}$ *är* $\frac{-a}{b}$ *och den multiplikativa inversen till* $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{1}$ *är* $\frac{b}{a}$.

Kroppen F_D kallas *bråkkroppen* (eng. the field of fractions) *av D* eller *kvotkroppen* (eng. the field of quotients) *av D*. Om man talar om kvotkroppar är det viktigt att inte blanda ihop dessa med kvotringar R/I. De senare som bättre kallas restklassringar har inget med bråk att göra utan är en generaliserad kongruensräkning.

Lemma 30.4 *Låt D vara ett integritetsområde och* $\phi\colon D \to F_D$ *avbildningen där* $\phi(a)=\frac{a}{1}$. *Då är* ϕ *en injektiv ringhomomorfi.*

Ett integritetsområde D är alltså isomorft med delringen $\phi(D)$ av sin bråkkropp F_D. Man identifierar därför ofta D med sin bild $\phi(D)$ och ser D som en delring av sin bråkkropp.

Exempel 1 Bråkkroppen av ringen **Z** är kroppen **Q**. Den allmänna konstruktionen av bråkkroppar för integritetsområden är i själva verket modellerad på och en generalisering av konstruktionen av **Q**.

Exempel 2 Låt K vara en kropp och $D= K[x]$ vara ringen av alla polynom i x med koefficienter i K. Då är ett D ett integritetsområde. Dess bråkkropp F_D som skrives $K(x)$ kallas kroppen av rationella funktioner i x över K. Elementen i $K(x)$ är bråk $\frac{f(x)}{g(x)}$ av polynom i $K[x]$ där $g(x)$ är skilt från nollpolynomet. Om vi identifierar $K[x]$ med sin bild i $K(x)$ under ϕ så blir $K[x]$ en delring av $K(x)$ och K en delkropp av kroppen $K(x)$.

Exempel 3 Låt $D= \mathbf{Z}[i]$ vara ringen av Gaussiska heltal $a+bi$ där $a,b\in \mathbf{Z}$. Då kan bråkkroppen F_D av D identifieras med delkroppen av **C** bestående av alla komplexa tal $\alpha+\beta i$ där $x,y\in \mathbf{Q}$. För att se detta utnyttjar man följande identiteter i F_D :

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ad-bc)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ad-bc)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\,\frac{i}{1}$$

Om vi låter $\alpha = \frac{(ad-bc)}{c^2+d^2}$ och $\beta = \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$ kan vi alltså uppfatta $\frac{a+bi}{c+di}$ som det komplexa talet $\alpha+\beta i$.

Man kan gå vidare och konstuera en isomorfi från F_D till restklassringen $\mathbf{Q}[t]/(t^2+1)$ genom att avbilda $\alpha+\beta i$ på restklassen $\alpha+\beta t +(t^2+1)$ av det lineära polynomet $\alpha+\beta t \in \mathbf{Q}[t]$. Speciellt får vi då att $\mathbf{Q}[t]/(t^2+1)$ är en kropp vilket även följer av att polynomet t^2+1 är irreducibelt över **Q**.