MATEMATIK	Datum: 2007-05-28	Tid: 8-30
Chalmers	Hjlpmedel: Beta, godkänd kalkulator	
A.Heintz	Telefonvakt: Jonatan Vasilis	Tel.0762-721860.

Tenta i matematisk modellering.TMA090/MAI530

Uppgifter för vilka elever har bonus poäng skall inte göras på tentan.

1. **Stabilitet och fasportrett**

   Betrakta följande differentialekvation i planet:

   $\dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = A\overrightarrow{r}(t)$, där $\overrightarrow{r}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

   Undersök om stationär punkt i origo är stabil och vilken typ den har. Skissa fasportrett till differentialekvationen. **(2p)**

2. **Ljapunovs funktion och stabilitet av stationära punkter.**

   Betrakta ekvationssystemet: $\begin{array}{l} x' = -y - x(x^4 + y^4) \\ y' = x - y(x^4 + y^4) \end{array}$

   Skriv definition på asymptotiskt stabil stationär punkt. Skriv definition på stark Ljapunovs funktion.

   Hitta en stark Ljapunovs funktion $V(x, y)$ till den givna ekvationen för att visa att stationära punkten i origo är asymptotiskt stabil. **(2p)**

3. **Periodiska lösningar till ODE**

   Formulera Poincare Bendixsons sats. Använd Poincare Bendixsons sats för att visa att det finns en ring: $r^2 < x^2 + y^2 < R^2$ i vilken ekvationssystemet

   $x' = -y + x(1 - x^4 - y^4); \quad y' = x + y(1 - x^4 - y^4)$

   har minst en periodisk lösning.

   Tips. Kombinera ekvationer så för att få fram ett uttryck för ρ', där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. **(4p)**

4. **Asymptotiska metoder till ODE**

   Betrakta ekvationen $u'' + u = \epsilon\,(u')^3$.

   a) Beskriv ideen med direkt asymptotisk utveckling av lösning för små ϵ. Ange ekvationer för termer av ording noll och ett i utvecklingen med avseende på $\varepsilon \to 0$. Förklara vilken typ av termer i utvecklingen kallas för seculära termer. **(2p)**

   b) Beskriv ideen men en av följande metoder: Linstedt-Poincare metoden, metoden med två tidsskalor, eller averaging metoden, som låter få fram en utveckling av lösnigar utan seculära termer. Ange i det fallet ekvationer för termer av ording noll och ett i utvecklingen. Du behöver INTE lösa dessa ekvationer här! **(2p)**

5. **Kemiska reaktioner men ODE och med Gillespies Monte Carlo metod**

   Betrakta följande reaktioner: $X + Z \underset{c_2}{\overset{c_1}{\rightleftarrows}} Q, \qquad W + Z \underset{c_4}{\overset{c_3}{\rightleftarrows}} P$ där $c_i\,dt$ är sannolikheten att under tiden dt reaktionen med index i skall ske. $i = 1, 2, 3, 4$.

   a) Ange differentialekvationer för antalet partiklar för dessa reaktioner. **(2p)**

   b) Ange formler för Gillespies algorytm som skulle stokastiskt modellera dessa reaktioner enligt Gillespies metod. **(2p)**

Max. 16 poäng;
För GU: **VG:** 13 poäng; **G:** 8 poäng;
För Chalmers: **5:** 14 poäng; **4:** 11 poäng; **3**: 8 poäng;