

Projekt Rovdjur - byte

Matematisk modellering

Erik Johansson, erjoh@student.chalmers.se
Carl Thorstensson, cartho@dd.chalmers.se
Tommy Zetterlund, milzeto@chl.chalmers.se

PROJEKT I MATEMATISK MODELLERING
Institutionen för matematik
Department of Mathematics
Examinator Alexei Heintz
GÖTEBORG UNIVERSITY AND
CHALMERS UNIVERSITY COLLEGE
Göteborg, Sweden 2005

Projektet behandlar olika populationer och hur deras bestånd ändras med tiden. Projektet tar upp flera olika scenarier med utgångspunkt i Volterra-Lotka-modellen över bytesdjur och rovdjur. Olika scenarier med ett bytesdjur och två rovdjur som lever tillsammans undersöks. Vi tittar även på den påverkan som årstiderna och temporära störningar har på populationerna. En stokastisk modell tas också upp.

Man kan se att modellerna beskriver verkligheten till viss del. Man kan se de stora huvuddragen för hur populationer ändras med tiden. De matematiska modellerna visades vara väldigt känsliga för vilka koefficienter som användes för att beskriva förhållandet mellan djuren. Modellerna kan ge en övergripande bild av hur populationer kan ändras med tiden men naturen är i själva verket alldeles för komplex för att kunna modelleras fullständigt korrekt.

1	INTRODUKTION.....	1
1.1	PROBLEMBESKRIVNING	1
2	ANALYS.....	2
2.1	LÖSNING	2
2.1.1	Populationstillväxt.....	2
2.1.2	Volterra-Lotka.....	3
2.1.3	Näringskedja	6
2.1.4	Konkurrerande rovdjur.....	8
2.1.5	Stokastiska effekter	10
2.1.6	Säsongsberoende	13
2.1.7	Tillfällig störning	15
2.2	DISKUSSION	15
3	BERÄKNINGAR.....	17
3.1	VOLTERRA-LOTKA	17
3.2	VOLTERRA-LOTKA MED DÄMPNING.....	18
3.3	KONKURRERANDE ROVDJUR.....	19
4	MATLABKOD	21
4.1	VOLTERRA-LOTKA	21
4.2	VOLTERRA-LOTKA MED DÄMPNING.....	21
4.3	NÄRINGSKEDJA.....	21
4.4	KONKURRERANDE ROVDJUR.....	22
4.5	MONTE CARLO DIREKTMETOD.....	23
4.6	SÄSONGSBEROENDE	24
4.7	TILLFÄLLIG STÖRNING	24
5	REFERENSER	25

1 INTRODUKTION

1.1 Problembeskrivning

Den första matematiska modellen, kallad *the classical Malthusian scheme*, som beskrev populationstillväxt, bygger på ett arbete utfört av Thomas R. Malthus (1766-1834). Han publicerade *The Principle of Population* 1798 där han beskrev de fundamentala och enkla termerna i hans teorier om tillväxt i ett mänskligt samhälle, och sambandet mellan överpopulation och utrotning. Den matematiska modell som baseras på dessa idéer är att populationens storlek beror på storleken av den tidigare generationen. Enkelt uttryckt, derivatan beror på en konstant gång det momentana antalet individer ($dx/dt = kx$).

Denna modell kan inte tillämpas i verkligheten då den beskriver en exponentiell tillväxt. Populationer av olika slag har en övre begränsning som kan bero på många faktorer, bland annat tillgång på mat eller plats. Ofta, då man talar om djur, så hotas också populationen av ett rovdjur.

En annan modell som utvecklar detta ytterligare är Volterra-Lotka som beskriver just sambandet mellan byte och rovdjur. Dessa ekvationer upptäcktes oberoende av både amerikanen Alfred Lotka (1925) och italienaren Vito Volterra (1926).

Idén med denna undersökning är att utveckla Volterra-Lotka modellen. Samt se hur inverkan och samspel mellan rovdjur och byte påverkar modellen. Vad händer om två rovdjur är ute efter samma byte till exempel? Påverkar slump resultatet? Eller vad händer om det efter 50 år plötsligt dör en massa bytesdjur på grund av någon sjukdom? Intressant är också att se om lösningen är periodisk eller stabil eller kanske till och med oscillerande.

Modellen vi utvecklar bygger på att djuren är jämt fördelade över ett begränsat område. Alla växtätare har obegränsat med mat. Vi antar även att växtätaren är utom yttre hot, men utan möjlighet att expandera geografiskt. Vi har alltså en skyddad och isolerad miljö. Exempel på sådana miljöer är mindre öar och naturreservat.

2 ANALYS

2.1 Lösning

Här utgår vi från modellen för populationstillväxt för att sedan utöka den till Volterra-Lotka. Sedan studeras inverkan av olika faktorer som till exempel konkurrens mellan rovdjur, slump och säsongsb beroende.

2.1.1 Populationstillväxt

Vi börjar med att titta på hur beståndet av en ensam växtätare förändras över tiden. Djuret vi tittar på är musen. Vi ger mössen obegränsad tillgång till föda men deras expansion hindras av att de inte kan leva hur många som helst på det aktuella området. Faktorer som hämmar deras expansion är till exempel sjukdomar och flockbeteende hos mössen. Mössens tillväxt ges av

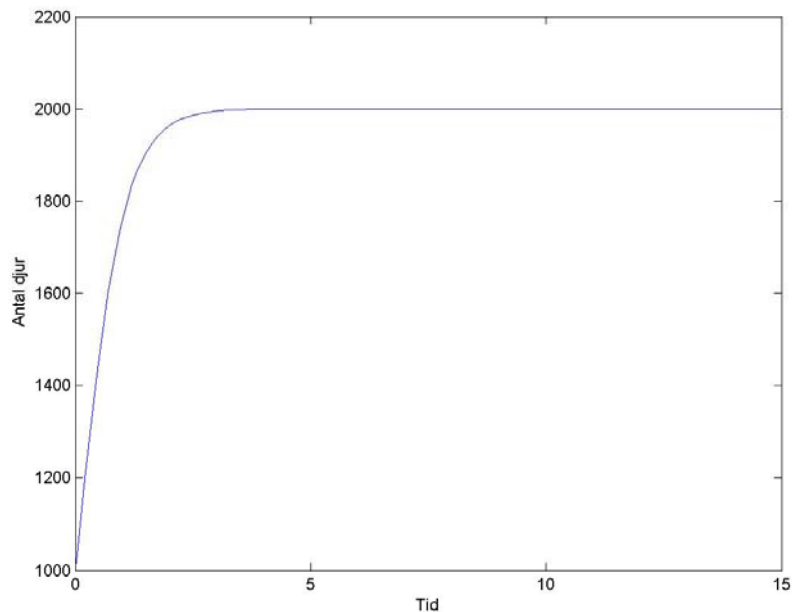
$$\dot{x}_1 = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) \quad (2.1)$$

där x_1 är antalet möss, K_1 är det maximala antal möss som kan vistas på området och a är den naturliga tillväxten. Man ser att om x_1 närmar sig K_1 så går derivatan mot noll vilken ger att populationen dämpas. Se tabell 2.1 för aktuella värden på koefficienterna. Vi tänker oss att tiden ges i år.

<i>Koefficient</i>	<i>Värde</i>
a	2
K_1	2000

Tabell 2.1. Koefficienter för ohotade möss.

Vi sätter in en startpopulation på 1000 möss och plottar antalet möss mot tiden. Mössen börjar med att växa exponentiellt men dämpas av då populationen närmar sig sin maxnivå, där antalet sedan ligger stabilt. Se figur 2.1.



Figur 2.1. Ohotade möss med avseende på tiden.

2.1.2 Volterra-Lotka

Modellen i föregående kapitel är dock inte särskilt representant för möss ute i verkligheten. I regel har alltid mössen något rovdjur som fiende. Vi väljer därför att sätta in ormen som rovdjur med möss som sin enda föda. Mössens tillväxt begränsas här enbart av ormarnas antal, eftersom dessa äter mössen. Däremot glömmet vi den övre egenbegränsningen av arterna för ett tag och tittar på den rena modellen som kallas Volterra-Lotka.

Mössen har, som tidigare, obegränsad tillgång till föda. Detta representeras av termen ax_1 . Ormarna däremot, som är beroende av att det finns möss i området kommer sakta att självdö om det inte finns tillräckligt många möss kvar. Den term som beskriver detta är $-cx_2$. Volterra-Lotka ges av

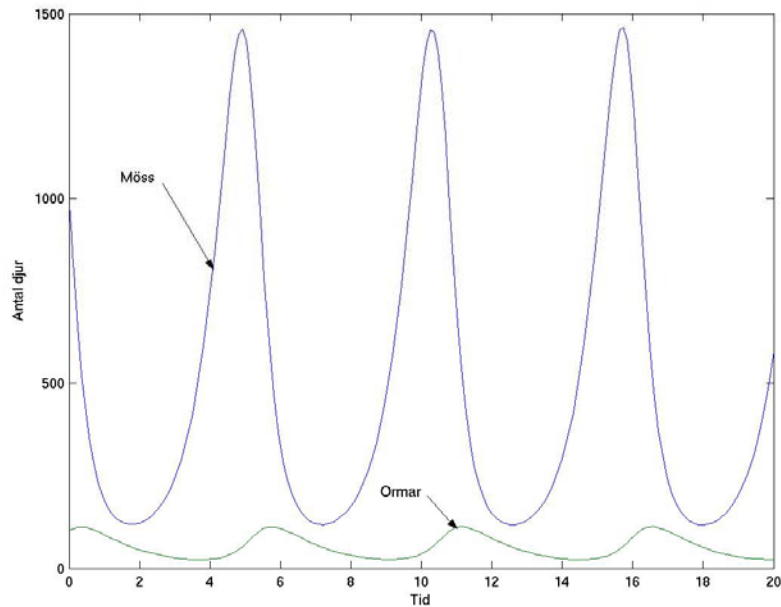
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1x_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

x_1 är antalet möss och x_2 är antalet ormar. a är som sagt mössens tillväxtfaktor och b är den begränsning på mössens tillväxt som ormarnas konsumtion orsakar. c orsakar som sagt den naturliga döden för ormarna då det inte finns någon mat tillgänglig och d påverkar ökningen i ormarnas antal då det finns tillgång till möss som föda. De koefficienter som valts redovisas i tabell 2.2. Notera att det inte finns några "riktiga" koefficienter utan dessa har grovt uppskattats.

Koefficient	Värde
a	2
b	0,035
c	0,8
d	0,0015

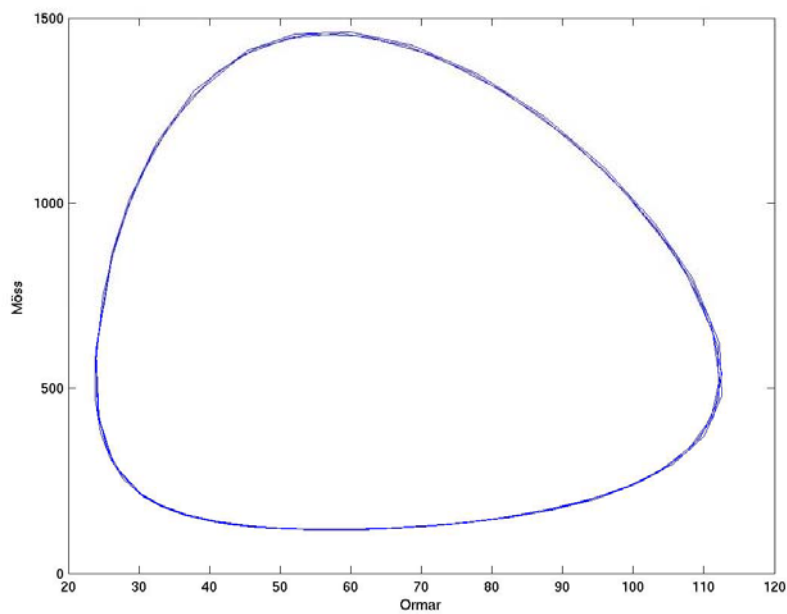
Tabell 2.2. Koefficienter till Volterra-Lotka.

Figur 2.2 visar en bild över hur antalen möss och ormar varierar med tiden. Startvärdena är 1000 möss och 100 ormar. Vi ser här att ormarna ökar snabbast i antal då antalet möss är som störst. När sedan ormarna blir många kommer antal möss att minska, vilket leder till att ormarna i sin tur minskar och så vidare. Totalt sett verkar lösningen vara periodisk med ormarnas population förskjuten jämfte mot mössens.



Figur 2.2. Antalet ormar och antalet möss plottat mot tiden.

För att närmare studera mus-orm-relationen plottar vi fasporträttet för ekvationssystemet (2). Vi plottar alltså antal ormar mot antalet möss.



Figur 2.3. Antalet ormar plottat mot antalet möss.

Här syns tydligt att lösningen är periodisk, precis som vi misstänkte. Detta visas analytiskt i kapitel 3.1.

Vi drog tidigare slutsatsen att antalet djur av en art inte enbart kan bero på tillgången till föda, utan även på hur många exemplar som finns av den aktuella arten. På grund av till exempel konkurrens, sjukdomar eller platsbrist finns det alltid en övre gräns för hur stor populationerna kan bli. Vi utvecklar modellen ytterligare med hjälp av begränsande faktorer, precis som i fallet med endast möss. Jämför med ekvation (2.1). Begränsningen påverkar både mössen och ormarna. Ekvationssystemet (2.2) modifieras då till

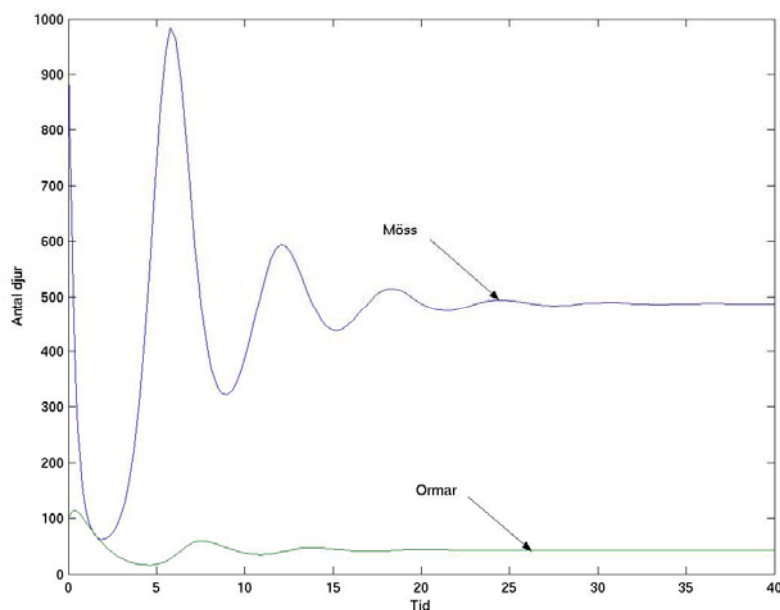
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1\left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2\left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + dx_1x_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Begränsningen för de bägge arterna är uppbyggd på samma sätt som i ekvation (2.1). I tabell 2.3 redovisas de koefficienter som valts. Notera att begränsningen för rovdjuret är betydligt lägre än bytesdjuret. Detta beror på att rovdjur ofta vistas i revir och är ofta till antalet mindre än bytesdjuren i ett givet område.

<i>Koefficient</i>	<i>Värde</i>
<i>a</i>	2
<i>b</i>	0,035
<i>c</i>	0,8
<i>d</i>	0,0015
<i>K₁</i>	2000
<i>K₂</i>	500

Tabell 2.3. Koefficienter till Volterra-Lotka med begränsning.

Vi sätter startvärdena till 1000 möss och 100 ormar och plottar antalen mot tiden. Resultatet visas i figur 2.4.



Figur 2.4. Antalet ormar och möss då tillväxten är begränsad.

Här ser vi att då tillväxten har en övre gräns kommer antalen ormar och möss att nå ett stabilt jämviktsläge. Jämviktsläget är ungefär 487 möss och 43 ormar. Detta resultat är betydligt mer förankrat i verkligheten än modellen utan begränsning då det är allmänt känt att ett naturområde som får lämnas i fred till slut alltid når en slags jämvikt.

För att se hur lösningen beter sig plottar vi i figur 2.5 relationens fasporträtt.

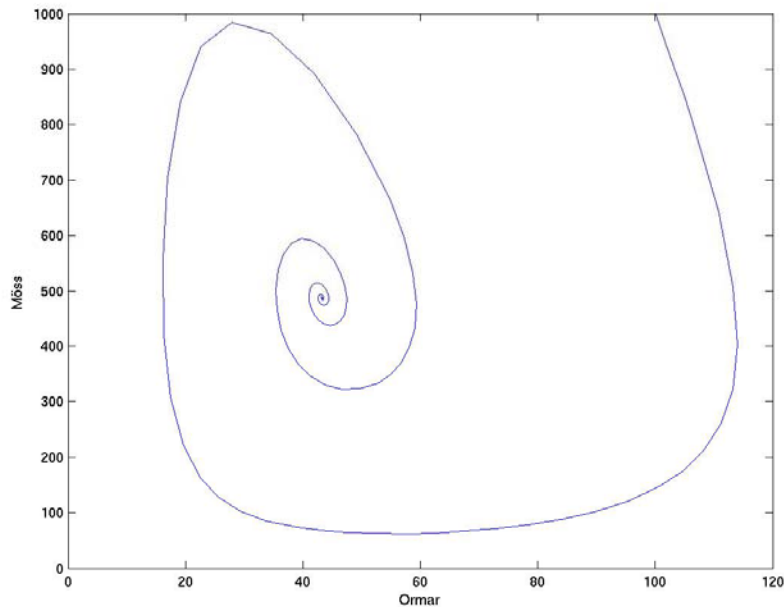


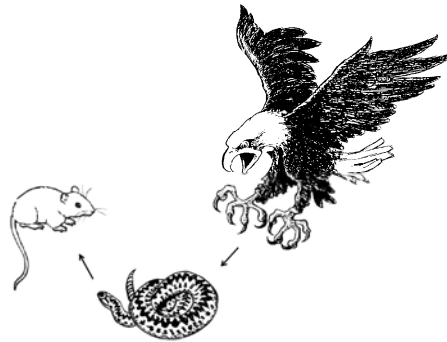
Bild 2.5. Antalet ormar plottat mot antalet möss då tillväxten är begränsad.

Vi ser att lösningen går mot ett stabilt jämviktsläge. Den här lösningen är stabil. För analytiskt bevis för detta, se kapitel 3.1.

2.1.3 Näringskedja

För att studera hur ovannämnda system beter sig då man tillför en tredje art behöver vi modifiera Volterra-Lotka metoden genom att tillföra en tredje ekvation för vår tredje art. Beroendet, de tre arterna emellan, kommer att bli mer komplicerat. Antal koefficienter kommer att öka och det blir allt svårare att kontrollera lösningen. Vi väljer därmed att studera olika situationer separat och gör det enbart numeriskt.

Djuret vi väljer att lägga till är en rovfågel, till exempel en tornfalk, vars naturliga kost består av både ormar och möss. Vi börjar med att studera fallet då rovfågeln enbart äter ormen, som i sin tur enbart äter musen. Systemet är alltså en klassisk näringskedja.



Figur 2.6. Näringskedja

Vi tänker oss alltså modellen enligt figur 2.6. Vi sätter tillväxtbegränsning på alla tre arterna enligt samma modell som ekvation (2.1) och (2.3). Sambandet mellan arterna och dess tillväxt ges då av

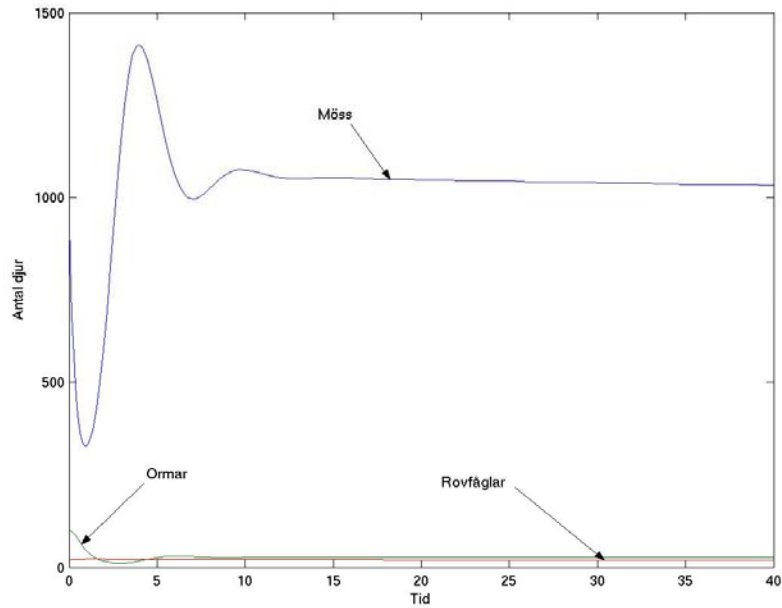
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + dx_1x_2 - ex_2x_3 \\ \dot{x}_3 = -fx_3 \left(1 - \frac{x_3}{K_3}\right) + gx_2x_3 \end{cases} \quad (2.4)$$

Ekvationssystemets uppbyggnad är samma som i ekvationssystem (2.3). Ekvationen för antalet ormar har fått ytterligare en begränsning $-ex_2x_3$, nämligen rovfåglarnas konsumtion av ormar. Koefficienterna presenteras i tabell 2.4.

Koefficient	Värde
a	2
b	0,035
c	0,8
d	0,0015
e	0,04
f	0,09
g	0,0026
K_1	2000
K_2	500
K_3	90

Tabell 2.4. Koefficienter till näringskedja.

För att åskådliggöra lösningen plottar vi i figur 2.7 antalet möss, ormar och rovfåglar med avseende på tiden. Startpopulationerna väljs till 1000 möss, 100 ormar och 20 rovfåglar.

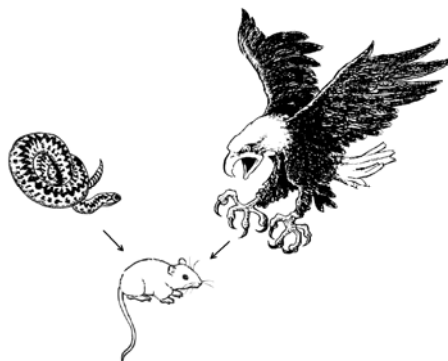


Figur 2.7. Rovfåglar, ormar och möss i näringskedja plottat med avseende på tiden.

Även här syns att de tre arterna efter en viss tid når ett jämviktsläge där alla tre kan leva sida vid sida. Jämviktsläget är 1075 möss, 27 ormar och 21 rovfåglar. Vi drar slutsatsen, efter modellerna med två arter, att de tre arterna skulle nå en periodisk lösning om de begränsade faktorerna togs bort.

Fasporträtten kan bara ritas för en art mot en annan. Eftersom djuren är beroende av varandra i en kedja, kan man plocka ut t.ex. rovfågeln och ormen och studera det på samma sätt som vi studerade ormar och möss ovan. Detta är redan gjort och vi går istället vidare på att studera vad som händer då rovfågeln äter möss, istället för ormar.

2.1.4 Konkurrerande rovdjur



Figur 2.8. Konkurrerande rovdjur

I detta scenario tänker vi oss att rovfågeln och ormen konkurrerar om mössen, se figur 2.8. De båda rovdjuren påverkas alltså negativt av existensen av det andra rovdjuret. Detta beskrivs med ekvationssystem (2.5).

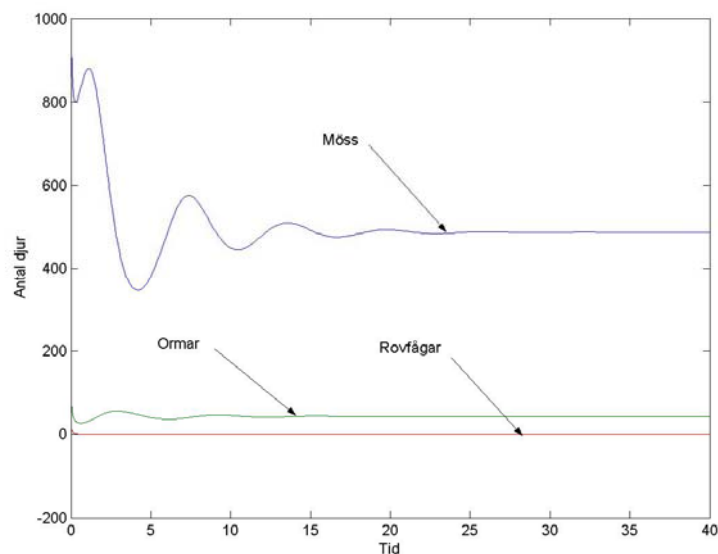
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1\left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - bx_1x_2 - ex_1x_3 \\ \dot{x}_2 = -cx_2\left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + dx_1x_2 - hx_2x_3 \\ \dot{x}_3 = -fx_3\left(1 - \frac{x_3}{K_3}\right) + gx_1x_3 - ix_2x_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Alla koefficienter redovisas i tabell 2.5.

<i>Koefficient</i>	<i>Värde</i>
<i>a</i>	2
<i>b</i>	0,035
<i>c</i>	0,8
<i>d</i>	0,0015
<i>e</i>	0,04
<i>f</i>	0,09
<i>g</i>	0,0026
<i>h</i>	0,7
<i>i</i>	0,2
<i>K₁</i>	2000
<i>K₂</i>	500
<i>K₃</i>	90

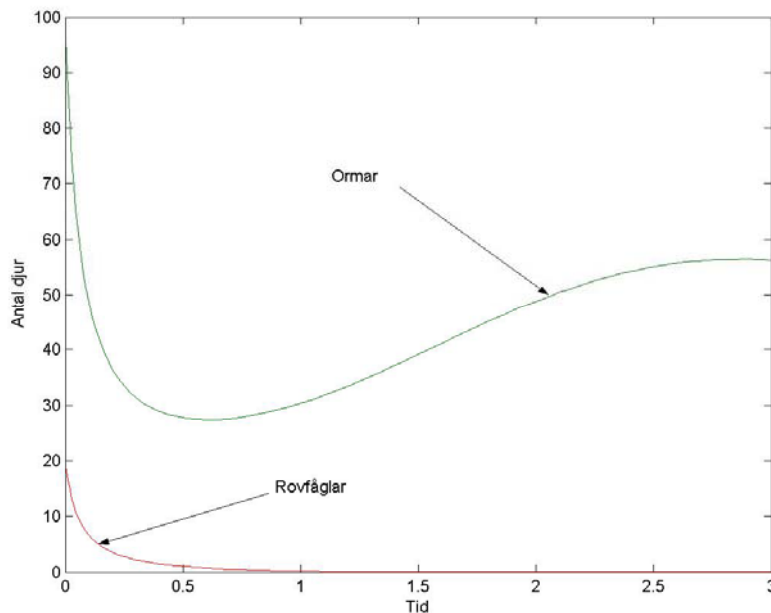
Tabell 2.5. Koefficienter till konkurrerande rovdjur.

Här har vi alltså en modell där två rovdjur är beroende av samma föda. Rovfåglarna och ormarna är kopplade till varandra genom att de bråkar om sin gemensamma föda. Konkurrensen mellan rovdjuren representeras av termerna $-hx_2x_3$ och $-ix_2x_3$. Vi visar lösningen till ekvationssystem (2.5) genom att plotta antalet djur med avseende på tiden. Startvärdena sätts till 1000 möss, 100 ormar och 20 rovfåglar.



Figur 2.9. Konkurrerande rovdjur plottat mot tiden.

För att tydliggöra vad som sker i figur 2.9 har vi plottat en förstoring av vad som sker när rovfågeln dör ut i figur 2.10.



Figur 2.10. Konkurrerande rovdjur plottat mot tiden (uppförstorat).

I det här fallet ser vi att rovfågeln snabbt dör ut. Det visar sig att då två rovdjur konkurrerar om samma begränsade föda, så kommer med stor sannolikhet ett av rovdjuret att dö ut. Detta resultat stämmer överens med "Lagen om uteslutning genom konkurrens", se [2]. Detta backas upp analytiskt i kapitel 3.2. Beviset är för en aningen förenklad situation där två rovdjur konkurrerar om ett stationärt, begränsat byte. Vi antar här att resonemanget även gäller i vårt fall trots att vårt byte faktiskt varierar med tiden. Det som visas är att ekvationssystemet har en sadelpunkt. Det är då extremt osannolikt att dessa två rovdjur kan existera samtidigt på grund av att endast de två stabila separatrixerna närmar sig den stationära punkten då t går mot oändligheten. Det kvarvarande rovdjuret och bytesdjuret kommer i detta fall att hitta ett jämviktsläge, precis som i Volterra-Lotka modellen med begränsning. Det visar sig vara precis samma jämviktsläge, 487 möss och 43 ormar.

2.1.5 Stokastiska effekter

Det som hittills studerats är deterministiska modeller. Men vad händer om man ser på systemet ut ett stokastiskt perspektiv? I verkligheten kan det lätt tänkas att slumpen har en viss inverkan på alla inblandande arter. Vi väljer att titta på den enklaste Volterra-Lotka modellen och modellerar den stokastiskt. Därefter jämförs den deterministiska modellen med den stokastiska och man ser om slumpen har en betydande inverkan.

För att modellera modellen stokastiskt används här Monte Carlo direktmetod. I princip så uppfattas då de olika termerna (händelserna) i Volterra-Lotka som olika sannolikheter. Det vill säga, om en term är mycket större än de andra i ekvationssystemet så påverkar den förloppet med en större sannolikhet. Sannolikheten vid tiden t att nästa "reaktion" sker i intervallet $(t + \tau, t + \tau + d\tau)$ och kommer att vara en R_{μ} -reaktion beskrivs av funktionen $P(\tau, \mu)$. Denna funktion kallas *reaktionssannolikhetens densitetsfunktion*. Det som menas med R_{μ} -reaktion i vårt fall är till exempel händelsen att en mus föds eller att en mus dör på grund av att den träffat på en orm. Notera att alla R_{μ} -händelser har som sagt olika sannolikhet att

inträffa. Det finns fyra olika händelser totalt, se ekv. (2.2). Dessa påverkar positivt eller negativt för arten i fråga. μ är indexet på alla händelser upp till händelsen M . Det vill säga $\mu = (1, \dots, M) = (1, 2, 3, 4)$ i detta fall. τ är ett slumpmässigt tidsögonblick mellan 0 och ∞ med fördelning enligt $P(\tau, \mu)$.

$$P(\tau, \mu) = h_\mu c_\mu \exp\left[-\sum_{\nu=1}^M h_\nu c_\nu \tau\right] \quad (2.6)$$

c_μ är i ekvation (2.6) de olika koefficienterna a , b , c och d . h_μ är de olika typerna av händelserna, det vill säga x_1 , x_1x_2 , x_2 och x_1x_2 .

Notera att $P(\tau, \mu)$ är riktigt fördelad, då

$$\int_0^\infty d\tau \sum_{\mu=1}^M P(\tau, \mu) = \sum_{\mu=1}^M h_\mu c_\mu \int_0^\infty d\tau \exp\left[-\sum_{\nu=1}^M h_\nu c_\nu \tau\right] = 1 \quad (2.7)$$

Målet här är att hitta ett slumpmässigt talpar (τ, μ) som är fördelat enligt $P(\tau, \mu)$. Det vill säga, vi vill veta när nästa händelse sker, samt vilken händelse. Teorin bakom att slumpa fram τ och μ kommer från Monte Carlo direktmetod. Först kan $P(\tau, \mu)$ skrivas om som en betingad sannolikhet.

$$P(\tau, \mu) = P_1(\tau) \cdot P_2(\mu | \tau) \quad (2.8)$$

$P_1(\tau)$ är sannolikheten att nästa händelse sker mellan $t + \tau$ och $t + \tau + d\tau$. $P_2(\mu | \tau)$ är sannolikheten att händelsen kommer att vara en R_μ -händelse *givet* att nästa händelse sker vid $t + \tau$. $P_1(\tau)$ fås genom att summera alla $P(\tau, \mu)d\tau$ över alla μ -värden.

$$P_1(\tau) = \sum_{\mu=1}^M P(\tau, \mu) \quad (2.9)$$

Om (2.9) substitueras in i (2.8) fås

$$P_2(\mu | \tau) = P(\tau, \mu) / \sum_{\mu=1}^M P(\tau, \mu) \quad (2.10)$$

(2.6), (2.8) och (2.9) ger då ekvationerna

$$P_1(\tau) = a \exp(-a\tau) \quad (2.11)$$

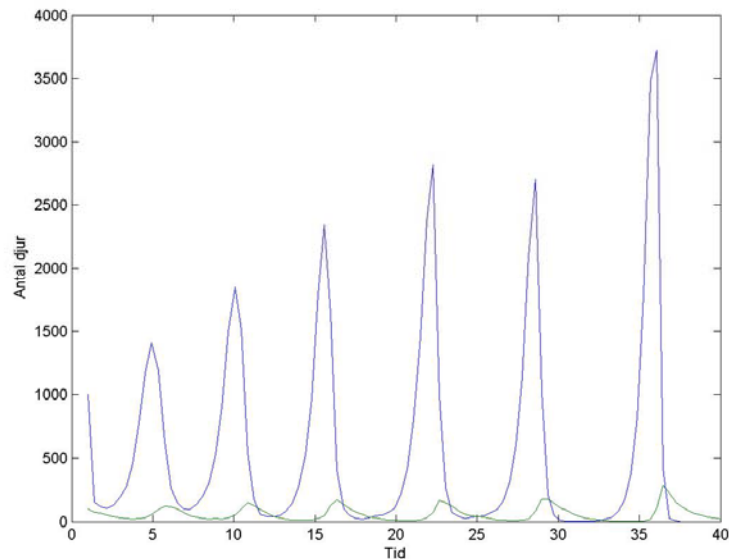
$$P_2(\mu | \tau) = a_\mu / a \quad (2.12)$$

Där $a_\mu = c_\mu h_\mu$ och a är summan av alla a . Notera att $P_2(\mu | \tau)$ är oberoende av τ . Enligt [1] kan τ genereras enligt $P_1(\tau)$ i (2.11) genom att det först dras ett slumpmässigt uniformt fördelat tal r_1 mellan 0 och 1 (till exempel kan kommandot *rand* i MATLAB användas) sedan ges τ av

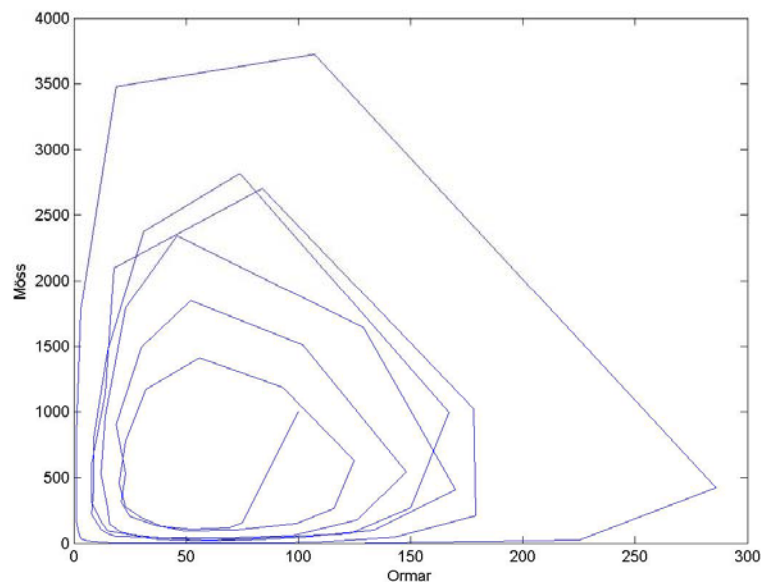
$$\tau = (1/a) \ln(1/r_1) \quad (2.13)$$

μ kan genereras på olika sätt. För att se vilket sätt som är valt här, se avsnitt 4.5. Där redovisas hela koden, skriven i MATLAB, för det program som simulerar Volterra-Lotka ekvationerna ur ett stokastiskt perspektiv. Men i princip så kan man säga att alla R_μ -händelser har olika sannolikhet att inträffa och den sammanlagda sannolikheten är 1. Om man då genererar ett slumpmässigt uniformt fördelat tal r_2 mellan 0 och 1 så bestämmer det μ . Givet μ ändras den aktuella populationen med +1 eller -1 beroende på tecknet framför R_μ .

Resultatet för den stokastiska modellen ses i figur 2.10 där mössen och ormarna är plottade mot tiden. Samt i figur 2.11 där arterna är plottade mot varandra.



Figur 2.10. Antalet ormar och antalet möss plottat mot tiden.



Figur 2.11. Antalet ormar plottat mot antalet möss.

Intressant här är att modellen ur ett stokastiskt perspektiv kan ge en oscillerande lösning. Jämför med figur 2.2 och figur 2.3 som visar fina periodiska lösningar. Notera att olika stokastiska körningar ger olika resultat. Vissa körningar gav resultatet att alla arter dog ut.

2.1.6 Säsongsberoende

Modellen, som vi hittills har ställt upp, lämpar sig egentligen bara i områden där djuren inte påverkas av vilken tid på året det är. Ungarna kommer alltså att födas under hela året och självdöden är lika stor året om. Detta sker egentligen enbart kring ekvatorn, där skillnaderna mellan årstiderna knappt är märkbar. För att öka realismen i modellen lägger vi till ett säsongsberoende som artar sig så att djurens förutsättningar varierar beroende på om det är sommar eller vinter.

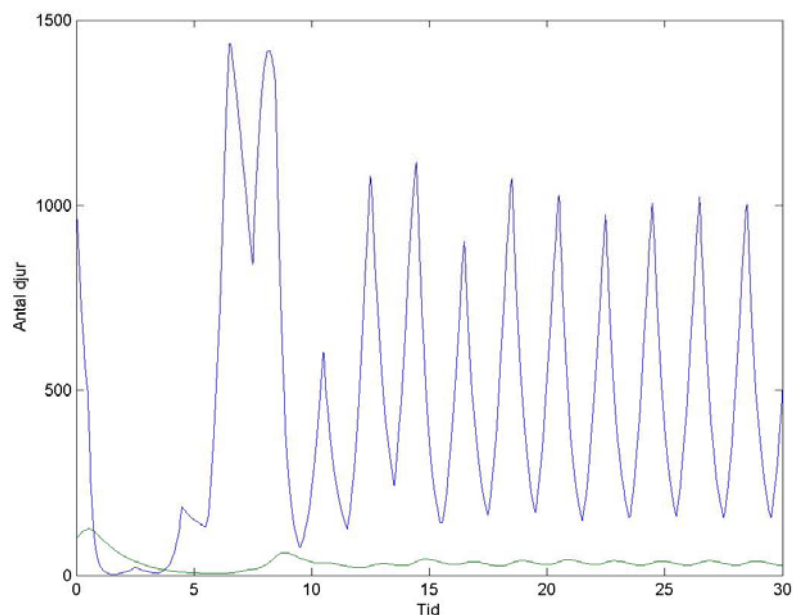
Systemet vi väljer att titta på är modellen med två arter och en begränsande faktor på bytesdjuret. Systemet är alltså uppställt enligt ekvationssystem (3) med koefficienter enligt tabell 2.6.

<i>Koefficient</i>	<i>Sommar</i>	<i>Vinter</i>
<i>a</i>	4	0
<i>b</i>	0,035	0,05
<i>c</i>	0,8	0,8
<i>d</i>	0,0015	0,0015
K_1	2000	2000
K_2	500	500

Tabell 2.6. Koefficienter för säsongsberoende.

Koefficienterna för sommaren är valda ungefär enligt kapitel 2.1.2 (Volterra-Lotka med begränsande faktor) med bland annat justeringen att mössens antal ökar med 4. På vintern föder mössen inga ungar, vilket visar sig som $a = 0$. Detta är realistiskt att anta. Fler möss blir också uppätta. Detta för att rovdjuren behöver mer mat på vintern och att mössen har svårare att försvara sig då. Dock kan det nämnas att just ormar går i ide på vintern och kanske inte passar in i just denna modell. Här får alltså ett annat rovdjur representeras i modellen. Eller så tänker vi oss helt enkelt att ormarna inte går i ide om vintern.

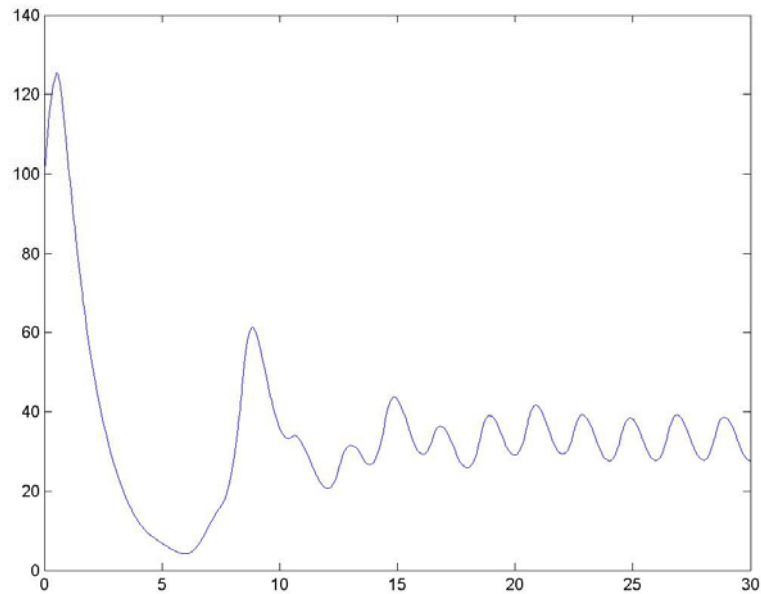
Vi väljer startvärden på 1000 möss och 100 ormar och får följande tidsberoende, se figur 2.12.



Figur 2.12. Säsongsberoende möss och ormar med avseende på tiden

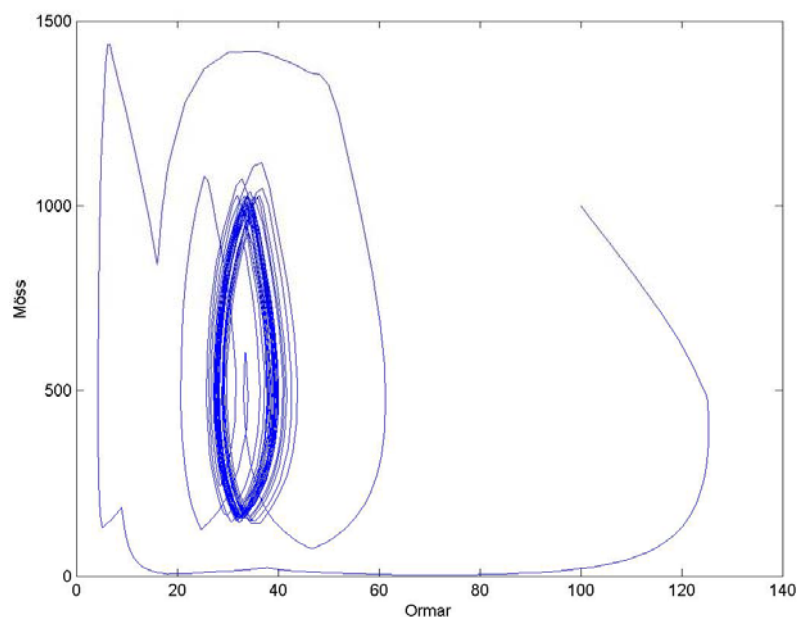
Notera att här representeras ett steg på tidsaxeln av en sommar eller en vinter. Vi ser att systemet svänger kraftigt i början. Modellen ställer dock in sig i en närmast periodisk lösning som orsakas av de olika säsongernas inverkan. Denna modell är lite mer anpassad till situationen i Sverige och att den ställer in sig i en periodicitet känns logiskt.

För att tydligare se hur rovdjuren förändras plottar vi upp den i annan skala i figur 2.13.



Figur 2.13. Säsongsberoende ormar med avseende på tiden

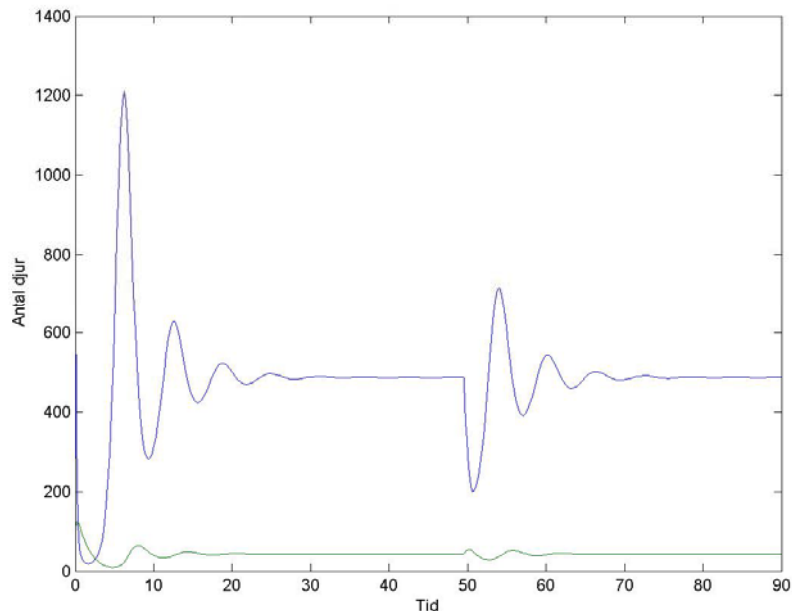
Här ser vi den periodicitet rovdjuret hamnar i. För att visa det periodiska sambandet mellan arterna plottar vi upp fasporträttet för detta system i figur 2.14.



Figur 2.14. Säsongsberoende möss plottat mot säsongsberoende ormar.

2.1.7 Tillfällig störning

För att undersöka hur känslig relationen mellan möss och ormar är lägger vi in en yttre påverkan. Sådana påverkningar kan i verkligheten vara sjukdomar, inplantering av nya djur eller helt naturliga ”djurår”, som innebär att en viss art ökar kraftigt i antal vissa år. I figur 2.15 läggs efter 25 år (50 halvår) en störning in på mössen.



Figur 2.15. Volterra-Lotka med begränsning och en yttre störning vid $t = 50$.

Efter 50 tidsenheter sker denna kraftiga påverkan. Detta resulterar i en kraftig störning i både antalen möss och ormar. Först minskar antalet möss kraftigt för att sedan öka igen på grund av att även ormarna påverkas. Störningen mynnar dock ut i samma stationära lösning som innan störningen. Detta är ganska intressant. I vår modell klarar alltså bestånden av att återanpassa sig till sitt ursprungliga jämviktsläge efter en relativt kort tid. Vi kan alltså uttyda att naturen i vår modell klarar av att återställa kortvariga störningar. I verkligheten klarar naturen av att det är kortare förändringar, så som jakt eller några kalla vintrar.

2.2 Diskussion

När vi modellerade Volterra-Lotka modellen fick vi antingen periodiska lösningar eller stabila stationära lösningar beroende på om djuren gavs en ”egenbegränsning” eller ej. I fallet med näringskedjan kommer djuren att kunna leva i harmoni och det är nog av den anledningen som det är så populärt att prata om just näringskedjor när man diskuterar djurens beroende av varandra. I verkligheten är dock aldrig relationen mellan arterna så pass enkel utan man borde egentligen prata om näringsväv, där alla arter äter flera olika föda och har flera olika fiender. En modell av detta skulle däremot bli väldigt stor och komplicerad. Därför nöjde vi oss med att modellera tre arter med olika typer av inbördes beroende.

Vi kan konstatera att då konkurrens mellan två djur råder så kommer med stor sannolikhet ett av rovdjuren att dö ut. Detta kan tyckas märkligt då naturen är full av situationer där två eller

fler rovdjur konkurrerar om samma bytesdjur. I dessa fall så kan alla de inblandade arterna leva sida vid sida i jämvikt. Skillnaden mellan verkligheten och vår modell är vårt antagande om isolerad miljö och enformig kost. I verkligheten kommer djuren att variera sin föda samt röra på sig vid brist på föda. Vår modell ger dem aldrig den möjligheten och därför kommer en av rovdjursarterna att dö ut.

I den här modellen har vi lagt tyngdpunkten på olika scenarier då vi har bytesdjur och rovdjur. Alla koefficienter är uppskattade med avseende på hur antalet djur av varje art borde förhålla sig till varandra. På grund av att det inte existerar några "riktiga" koefficienter är det omöjligt att motivera de exakta koefficienterna men de är valda så att modellerna blivit både intressanta och trovärdiga. Även om vi skulle ha hittat "riktiga" värden för till exempel en viss musstam så skulle inte de gälla för en annan godtycklig musstam. Vi anser alltså att korrekt valda koefficienter inte skulle ha givit modellen någon ytterligare dimension, utan snarare tagit fokus från hur modellen fungerar matematiskt. Intressant är dock att modellen visar sig vara otroligt känslig för indata. Vid minsta ändring av koefficienter så kan resultatet bli förödande. Vi har därför valt att använda samma koefficienter i samtliga fall i så stor utsträckning som möjligt.

3 BERÄKNINGAR

3.1 Volterra-Lotka

Analys av stationärpunkt för ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1x_2 \end{cases} = \begin{cases} bx_1\left(\frac{a}{b} - x_2\right) \\ dx_2\left(\frac{-c}{d} + x_1\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

(3.1) ger de stationära punkterna

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,0) \\ \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \end{array} \right.$$

Vi lineariserar kring varje stationär punkt och räknar sedan fram egenvärdena för respektive lineariserad matris.

$$(0,0): \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -c \end{cases}$$

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right): \begin{bmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{ac} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{ac} \end{cases}$$

Värden på den stationära punkten $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ får vi till (533,3333 ; 57,1429).

Egenvärdena till den stationära punkten $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ får vi till $\begin{cases} \lambda_1 = 1,2649i \\ \lambda_2 = -1,2649i \end{cases}$

Alltså är den stationära punkten $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ ett center. Det vill säga vi har en periodisk lösning.

3.2 Volterra-Lotka med dämpning

Analys av stationärpunkt för ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) + dx_1x_2 \end{cases} = \begin{cases} bx_1 \left(\left(\frac{a}{b} - \frac{ax_1}{bK_1} \right) - x_2 \right) \\ dx_2 \left(\left(\frac{-c}{d} + \frac{cx_2}{dK_2} \right) + x_1 \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

(3.2) ger de stationära punkterna

$$\begin{cases} (0,0) \\ (0, K_2) \\ (K_1,0) \\ \left(\frac{cK_1(bK_2 - a)}{bdK_1K_2 - ac}, \frac{a}{b} - \frac{ac(bK_2 - a)}{b(bdK_1K_2 - ac)} \right) = (Q_1, Q_2) \end{cases}$$

Vi lineariserar kring varje stationär punkt och räknar sedan fram egenvärdena för respektive lineariserad matris.

$$(0,0): \quad \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -c \end{cases}$$

$$(0, K_2): \quad \begin{cases} \lambda_1 = a - bK_2 \\ \lambda_2 = c \end{cases}$$

$$(K_1,0): \quad \begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -c + dK_1 \end{cases}$$

$$(Q_1, Q_2): \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{P_1 + P_4}{2} + \sqrt{\frac{(P_1 + P_4)^2}{4} - (P_1P_4 - P_2P_3)} \\ \lambda_2 = \frac{P_1 + P_4}{2} - \sqrt{\frac{(P_1 + P_4)^2}{4} - (P_1P_4 - P_2P_3)} \end{cases}, \text{ där } \begin{cases} P_1 = a - 2a \frac{Q_1}{K_1} \\ P_2 = dQ_2 \\ P_3 = -bQ_1 \\ P_4 = -c + 2c \frac{Q_2}{K_2} \end{cases}$$

Värden på den stationära punkten (Q_1, Q_2) får vi till (487,2299 ; 43,2220).

$$\text{Egenvärdena till den stationära punkten } (Q_1, Q_2) \text{ får vi till } \begin{cases} \lambda_1 = -0,2090 + 1,0140i \\ \lambda_2 = -0,2090 - 1,0140i \end{cases}$$

Alltså är den stationära punkten (Q_1, Q_2) en stabil spiral.

3.3 Konkurrerande rovdjur

Vi ska undersöka vilka stationära punkter som finns till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_1 - \phi x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (c - dx_2 - \psi x_1)x_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

där x_1 och x_2 är antalet rovdjur, a och c är hur tillgång på föda påverkar rovdjuren, b och d är den naturliga dödligheten och den "inre" konkurrensen. ϕ och ψ beskriver konkurrens mellan de olika rovdjuren. Det vill säga den "yttre" konkurrensen. Födan i vår uppgift varierar med tiden men är begränsad varför följande resonemang också kommer att gälla.

Villkor för stationär punkt till (3.3) är att

$$\begin{cases} \frac{a}{b} - x_1 - \frac{\phi}{b}x_2 = 0 \\ \frac{c}{d} - x_2 - \frac{\psi}{d}x_1 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

(3.4) är ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två okända variabler vilket betyder att vi kan lösa ut x_1 och x_2 explicit. Detta leder till

$$\begin{cases} x_1 = \frac{ad - c\phi}{bd - \phi\psi} \\ x_2 = \frac{bc - a\psi}{bd - \phi\psi} \end{cases} \quad (3.5)$$

Vi sammanfattar nu med vilka stationära punkter som kan förekomma för (3.3).

$$\text{De punkter vi får är } \begin{cases} (0,0) \\ \left(0, \frac{c}{d}\right) \\ \left(\frac{a}{b}, 0\right) \\ \left(\frac{ad - c\phi}{bd - \phi\psi}, \frac{bc - a\psi}{bd - \phi\psi}\right) = (S_1, S_2) \end{cases}$$

Ett villkor vi har på de olika koefficienterna är att de skall vara så att de stationära punkterna kommer att ligga i första kvadranten. Vi har inte ett stationärt tillstånd där ett eller båda djuren är negativa till antalet. I och med detta krav får vi följande förhållande på koefficienterna:

Fall 1: $bd < \phi\psi$ med $ad < \phi c$ och $bc < a\psi$

Fall 2: $bd > \phi\psi$ med $ad > \phi c$ och $bc > a\psi$

Vi studerar fall 1. Samma resonemang kan användas i fall 2. För att undersöka beteendet i dessa punkter kan linearisera vi kring dessa stationära punkter.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_{10}, x_{20})} = \begin{bmatrix} a - 2bx_1 - \phi x_2 & -\phi x_1 \\ -\psi x_2 & c - 2dx_2 - \psi x_1 \end{bmatrix}_{(x_{10}, x_{20})}$$

Matrisen lineariseras för respektive stationär punkt.

$$\begin{aligned} (0,0): \quad & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} & \left(\frac{a}{b}, 0\right): \quad & \begin{bmatrix} -a & -\phi \frac{a}{b} \\ 0 & c - \psi \frac{a}{b} \end{bmatrix} \\ \left(0, \frac{c}{d}\right): \quad & \begin{bmatrix} a - \phi \frac{c}{d} & 0 \\ -\psi \frac{c}{d} & -c \end{bmatrix} & (S_1, S_2): \quad & \frac{1}{\underbrace{bd - \phi\psi}_W} \begin{bmatrix} b(\phi c - ad) & \phi(\phi c - ad) \\ \psi(a\psi - bc) & d(a\psi - bc) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi tar fram egenvärdena för respektive matris.

$$\begin{aligned} (0,0): \quad & \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = c \end{cases} \quad \text{Vi har positiva egenvärden. Nollan är alltså en instabil punkt.} \\ \left(0, \frac{c}{d}\right): \quad & \begin{cases} \lambda_1 = a - \phi \frac{c}{d} \\ \lambda_2 = -c \end{cases} \\ \left(\frac{a}{b}, 0\right): \quad & \begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = c - \psi \frac{a}{b} \end{cases} \end{aligned}$$

Origo är en instabil stationär punkt ty vi får positiva egenvärden i denna punkt. Egenvärdena i punkterna $\left(0, \frac{c}{d}\right)$ och $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ är båda mindre än noll i fall 1. Dessa båda punkterna är alltså stabila. Detta innebär att ett av djuren överlever och det andra utrotas.

Den sista punkten är en sadelpunkt på grund av att $\det(W) < 0$. Se ekvation (3.6)

$$\det(W) = \frac{(\phi c - ad)(a\psi - bc)}{bd - \phi\psi} < 0 \quad (3.6)$$

Det är då extremt osannolikt att dessa två rovdjur kan existera samtidigt på grund av att endast de två stabila separatrixerna närmar sig den stationära punkten då t går mot oändligheten.

4 MATLABKOD

4.1 Volterra-Lotka

djur1.m

```
function xprim=djur1(t,x)
```

```
a=2;  
b=0.035;  
c=0.8;  
d=0.0015;
```

```
xprim=[ a*x(1) - b*x(1)*x(2) ;  
        -c*x(2) + d*x(1)*x(2) ];
```

popu1.m

```
[t,x] = ode45(@djur1, [0 40], [1000; 100]);
```

```
figure(1)  
plot(t,x)
```

```
figure(2)  
plot(x(:,2),x(:,1))
```

4.2 Volterra-Lotka med begränsning

djur2.m

```
function xprim=djur2(t,x)
```

```
a=2;  
b=0.035;  
c=0.8;  
d=0.0015;
```

```
K1=2000;  
K2=500;
```

```
xprim=[ a*x(1)*( 1 - x(1)/K1 ) - b*x(1)*x(2) ;  
        -c*x(2)*( 1 - x(2)/K2 ) + d*x(1)*x(2) ];
```

popu2.m

```
[t,x] = ode45(@djur2, [0 40], [1000; 100]);
```

```
figure(1)  
plot(t,x)
```

```
figure(2)  
plot(x(:,2),x(:,1))
```

4.3 Näringskedja

djur3.m

```
function xprim=djur3(t,x)
```

```
a=2;
```

```

b=0.035;
c=0.8;
d=0.0015;

e=0.04;
f=0.09;
g=0.0026;

K1=2000;
K2=500;
K3=90;

xprim=[ a*x(1)*( 1 - x(1)/K1 ) - b*x(1)*x(2) ;
        -c*x(2)*( 1 - x(2)/K2 ) + d*x(1)*x(2) - e*x(2)*x(3) ;
        -f*x(3)*( 1 - x(3)/K3 ) + g*x(2)*x(3) ];

```

popu3.m

```
[t,x] = ode45(@djur3, [0 40], [1000; 100; 20]);
```

```
figure(1)
plot(t,x)
```

```
figure(2)
plot(x(:,2),x(:,1))
```

```
figure(3)
plot(x(:,3),x(:,1))
```

```
figure(4)
plot(x(:,3),x(:,2))
```

4.4 Konkurrerande rovdjur

djur4.m

```
function xprim=djur4(t,x)
```

```

a=2;
b=0.035;
c=0.8;
d=0.0015;

```

```

e=0.04;
f=0.09;
g=0.0026;

```

```

h=0.7;
i=0.2;

```

```

K1=2000;
K2=500;
K3=90;

```

```

xprim=[ a*x(1)*( 1 - x(1)/K1 ) - b*x(1)*x(2) - e*x(1)*x(3) ;
        -c*x(2)*( 1 - x(2)/K2 ) + d*x(1)*x(2) - h*x(2)*x(3) ;
        -f*x(3)*( 1 - x(3)/K3 ) + g*x(1)*x(3) - i*x(2)*x(3)];

```

popu4.m

```
[t,x] = ode45(@djur4, [0 40], [1000; 100; 20]);
```

```
figure(1)
plot(t,x)
```

```
figure(2)
plot(x(:,2),x(:,1))
```

```
figure(3)
plot(x(:,3),x(:,1))
```

```
figure(4)
plot(x(:,3),x(:,2))
```

4.5 Monte Carlo direktmetod

VL_stoc.m

```
X(1,1) = 1000; %möss
X(1,2) = 100; %ormar

x1 = 1000;
x2 = 100;

a = 2;
b = 0.035;
c = 0.8;
d = 0.0015;

t = linspace(1,40);
momentantid = 0;

for i=2:length(t)
    while momentantid < t(i)
        r1=rand; r2=rand;

        A1 = a*x1;
        A2 = b*x2*x1;
        A3 = c*x2;
        A4 = d*x1*x2;

        A = A1 + A2 + A3 + A4;

        tau = (1/A)*log(1/r1);

        P1 = A1 / A;
        P2 = A2 / A;
        P3 = A3 / A;
        P4 = A4 / A;

        if r2 <= P1
            x1 = x1 + 1;
        end

        if (r2 > P1) & (r2 <= (P1+P2))
            x1 = x1 - 1;
        end

        if (r2 > (P1+P2)) & (r2 <= (P1+P2+P3))
            x2 = x2 - 1;
        end

        if (r2 > (P1+P2+P3))
            x2 = x2 + 1;
        end

        momentantid = momentantid + tau;

    end

    X(i,1) = x1;
    X(i,2) = x2;

end

figure(1)
plot(t,X)

figure(2)
plot(X(:,2),X(:,1))
```

4.6 Säsongsberoende

djur5.m

```
function xprim=djur5(t,x,)

test=round(t);

if mod(test,2) == 0

    % sommar s
        a=4;
        b=0.035;
        c=0.8;
        d=0.0015;

        K1=2000;
        K2=500;

else
    %vinter v
        a=0;
        b=0.050;
        c=0.8;
        d=0.0015;

        K1=2000;
        K2=500;

end

xprim=[ a*x(1)*( 1 - x(1)/K1 ) - b*x(1)*x(2) ;
        -c*x(2)*( 1 - x(2)/K2 ) + d*x(1)*x(2) ];
```

popu5.m

```
[t,x] = ode45(@djur5, [0 30], [1000; 100]);

figure(1)
plot(t,x)

figure(2)
plot(x(:,2),x(:,1))

figure(3)
plot(t,x(:,2))
```

4.7 Tillfällig Störning

djur6.m

```
function xprim=djur6(t,x)

test = round(t);

        a=2;
        b=0.035;
        c=0.8;
        d=0.0015;

        K1=2000;
        K2=500;

if mod(test,50) == 0
    x(1) = 2*x(1);
end
```

popu6.m

```
xprim=[ a*x(1)*( 1 - x(1)/K1 ) - b*x(1)*x(2) ;
        -c*x(2)*( 1 - x(2)/K2 ) + d*x(1)*x(2) ];

[t,x] = ode45(@djur6, [0 90], [1000; 100]);

figure(1)
plot(t,x)
```

5 REFERENSER

1. Gillespie D.T., (1976), "*A General Method for Numerically Simulating the Stochastic Time Evolution of Coupled Chemical Reactions*," J.Comp. Phys., 22:403-434.
2. Arrowsmith D.K. , Place C.M.: *Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach with Applications*. Chapman and Hall. (1982).
3. *Mathworld Wolfram* <http://mathworld.wolfram.com/> (Acc 2005-05-13)
4. *Interesting Facts about Food Chains*
http://www.arcytech.org/java/population/facts_foodchain.html (Acc 2005-05-13)