MATEMATIK	Datum: 2008-08-18	Tid: 8:30
GU, Chalmers	Hjälpmedel: Inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Ragnar Freij	Tel.: 0762-721860.

Tenta i matematisk modellering, MMG510, MVE160

OBS! Du behöver inte lösa problem av den typ för vilken du har fått bonuspoäng.

1. **Lyapunov functions and stability of stationary points.**

   a) Formulera ett criterium for asymptotiskt stabil stationär punkt till en ODE med hjälp av en Lyapunovs funktion som inte är stark Lyapunovs funktion. **(2p)**

   b) Betrakta ekvationssystemet: $$\begin{aligned} x' &= -y/3 - x(3x^2 + y^2) \\ y' &= x - y(3x^2 + y^2) \end{aligned}$$

   Hitta en stark Ljapunovs funktion $V(x, y)$ för att visa att stationära punkten i origo är asymptotiskt stabil. **(2p)**

   Tips. Använd $V(x, y)$ på formen $V(x, y) = ax^2 + y^2$ och välj parametern a så att $V(x, y)$ blir en stark Ljapunovs funktion.

2. **Periodiska lösningar till ODE**

   Formulera Poincare - Bendixsons sats. Använd Poincare - Bendixsons sats för att visa att ekvationssystemet

   $x' = -4y + x(1 - x^2 - y^2); \quad y' = 4x + y(1 - x^2 - y^2)$

   har minst en periodisk lösning i en ring: $\rho^2 < x^2 + y^2 < R^2$.

   Tips. Använd polära koordinater och betrakta ekvationen för radien. **(4p)**

   Lösning:

   Multiplicera första ekvationen med x och andra ekvationen med y och addera dem. Detta medför ekvationen för $r^2 = x^2 + y^2$

   $1/2(x^2 + y^2)' = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$

   eller: $1/2(r^2)' = r^2(1 - r^2)$. Ekvationen för radien är

   $r' = r(1 - r^2)$.

   Det är lätt att se från sista ekvationen att radien r växer för $r = 0.5$ eftersom $r' > 0$ i det fallet och att radien minskar för $r = 2$ eftersom $r' < 0$ i det fallet. Det betyder att ringen $0.5 < r < 2$ är en invariant mängd som banor till givna ekvationen aldrig lämnar. $r' = 0$ bara för $r = 1$ i den ringen. Detta medför att stationära punkter kan finnas bara på cirkeln $r = 1$. Men ursprungliga ekvationerna medför att hastigheten är alldrig noll på den cirkeln. Detta medför att ringen $0.5 < r < 2$ innehåller inga stationära punkter Enligt Poincare Bendixsons sats skall ringen innehålla minst en periodisk lösning.

3. **Asymptotiska metoder för ODE.**

   a) Betrakta ideen med direkt asymptotisk utveckling i ODE. Vad menas med sekulära termer i en utveckling? Betrakta ekvationen: $u'' + u = \epsilon(1 - u^2)u'$.

   Bestäm termer av ordning noll och ett i en direkt asymptotisk utveckling av lösningar till ekvationen för små ϵ . **You do not need to solve equations completely here!**

   Använd formler

   $$\sin^3(t) = -1/4\sin(3t) + 3/4\sin(t)$$

   (2p)

   b) Berätta om ideen av metoden med "averaging" för att få en utveckling av lösningar utan sekulära termer.**(2p)**

a) Vi framställer lösningen som $u = u_0 + \epsilon u_1 + o(\epsilon)$. Med att sätta den anzatsen i ekvationen och behålla termer av ordning t.o.m. ϵ vi får:

$$u_0'' + u_0 + \epsilon(u_1'' + u_1) = \epsilon(1 - u_0^2)u_0' + o(\epsilon)$$

Ekvationen skall gälla för alla ϵ. Vi skriver separata ekvationer för koefficienter vid olika potenser av ϵ.

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \qquad & u_0'' + u_0 = 0, \\ \epsilon^1 : \qquad & (u_1'' + u_1) = (1 - u_0^2)u_0'. \end{aligned}$$

Dessa ekvationer medför:

$$u_0 = A \times \cos(t), \qquad A = u(0)$$

$$(u_1''+u_1) = -A\sin(t)+A\sin(t)A\cos^2(t) = -A\sin(t)+A^2\sin(t)(1-\sin^2(t)) = A(A-1)\sin(t)-A^2\sin^3(t)$$

$$\sin^3(t) = -1/4\sin(3t) + 3/4\sin(t)$$

Detta medför att lösningen kan skrivas som summa av partikulära lösningar och en homogena lösningar:

$$u_1(t) = C_0\sin(t) + C_1 t\cos(t) + C_2\sin(3t)$$

med konstanter som definieras med instättning till ekvationen. Vi lägger märke till att andra termen växer oändligt.

b) Metoden med averaging använder framställningen $u(t, \epsilon) = a(t)\cos(t + \beta(t))$ med två nya okända funktioner $a(t)$ och $\beta(t)$. Den framställning med konstanta a och β gäller i fall $\epsilon = 0$. Man förutsätter att för $u'(t)$ gäller samma formeln som i fall med konstanta $a(t)$ och $\beta(t)$ nämligen: $u'(t, \epsilon) = -a(t)\sin(t + \beta(t))$. Man deriverar dessa två uttryck (med variabla $a(t)$och $\beta(t)$) med avseende på t och får två nya uttryck för $u'(t)$ och $u''(t)$:

$u'(t) = -a\sin(t + \beta) + a'\cos(t + b) - a\beta'\sin(t + \beta)$

$u''(t) = -a\cos(t + \beta) - a'\sin(t + \beta) - a\beta'\cos(t + \beta)$

Dessa uttrycl medför att

$a'\cos(t + \beta) - a\beta'\sin(t + \beta) = 0$

a'$\sin(t + \beta) + a\beta'\cos(t + \beta) = \epsilon a\sin(t + \beta) - 1/3\epsilon a^3\sin^3(t + \beta)$

Med att lösa ut a' och β' vi får ekvationer

$a' = \epsilon\left[a\sin(t + \beta) - 1/3a^3\sin^3(t + \beta)\right]\sin(t + \beta)$

$a\beta' = \epsilon\left[a\sin(t + \beta) - 1/3a^3\sin^3(t + \beta)\right]\cos(t + \beta)$

som visar att $a(t)$ och $\beta(t)$ varierar longsamt med tiden. Man använder lite trigonometriska formler och behåller i högerled bara termer som varierar långsamt (utan periodiska funktioner). Detta medför enkla ekvationer för a och β som kan lösas explicit och ger approximationen av lösningar utan sekulära termer.

4. **Kemiska reaktioner och Gillespies metod**

Betrakta följande reaktioner: $X + Z \underset{c_2}{\overset{c_1}{\rightleftarrows}} W, \qquad W \overset{c_3}{\rightarrow} P$ där $c_i\,dt$ är sannolikheten att under tiden dt reaktionen med index i skall äga rum. $i = 1, 2, 3$.

a) Ange differentialekvationer för antalet partiklar för dessa reaktioner. **(2p)**

b) Ange formler för algoritmen som skulle stokastiskt modellera dessa reaktioner enligt Gillespies metod. **(2p)**

$X' = -c_1XZ + c_2W$

$Z' = -c_1XZ + c_2W$

$W' = c_1XZ - (c_2 + c_3)W$

$P' = c_3W$

b) **Gillespies metod.**

$P(\tau, \mu)d\tau$ är sannolikheten att ha en reaktion av typ μ under ett tidsintervall $d\tau$ efter tiden τ då inga andra reaktioner ägde rum.

$P(\tau, \mu) = P_0(\tau)h_\mu c_\mu d\tau$.

Här $P_0(\tau)$ är sannolikheten att inga reaktioner skall äga rum under tiden τ.

$h_\mu c_\mu d\tau$ är sannolikheten att just reaktionen μ skall gå under tidsintervall $d\tau$.

h_μ är antalet olika kombinationer av partiklar för aktuella X, Z, W, P som kan delta i rekationen μ. För reaktion 1 i exemplet är det $h_1 = X \cdot Z$, för reaktion 2 är det $h_2 = W$, för reaktion 3 är det $h_3 = W$.

$P_0(\tau) = exp(-a\tau)$ med $a = \sum_{\mu=1}^{3} h_\mu c_\mu$.

Algoritmen för att stokastiskt modellera givna reaktioner.

0) inicialisera variabler X, Z, W, P och tiden $t = 0$.

1) Beräkna h_i, a.

2) Generera två slumptal r och p jämt fördelade över intervallet $(0, 1)$.

Tag tiden τ före nästa reaktion som $\tau = 1/a \ln(1/r)$.

Välj nästa reaktion μ så att $\sum_{i=1}^{\mu-1} h_i c_i \leq p\, a \leq \sum_{i=1}^{\mu} h_i c_i$.

3) Tillägg τ till tidsvariabeln t. Ändra antalet partiklar enligt väljad reaktion:

$\mu = 1 \quad \rightarrow X = X - 1,\ Z = Z - 1,\ W = W + 1.$

$\mu = 2 \quad \rightarrow X = X + 1,\ Z = Z + 1,\ W = W - 1.$

$\mu = 3 \quad \rightarrow P = P + 1,\ W = W - 1.$

3) Om tiden är större änd den maximala tiden vi är intresserade av, sluta beräkningar, annars gå till steg 1.

Max. 16 points;

For GU: **VG:** 13 points; **G:** 8 points;
For Chalmers: **5:** 14 points; **4:** 11 points; **3**: 8 points;