

Tenta i matematisk modellering.TMA075/MAI530

Uppgifter för vilka elever har bonus poäng skall inte göras på tentan.

1. Stabilitet och fasportrett

Betrakta följande differentialekvation i planet:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = A\vec{r}(t), \text{ där } \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} \text{ och } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Undersök om stationär punkt i origo är stabil och vilken typ den har. Skissa fasportrett till differentialekvationen. **(2p)**

2. Ljapunovs funktion och stabilitet av stationära punkter.

Betrakta ekvationssystemet:
$$\begin{aligned} x' &= -y/3 - x(3x^2 + y^2) \\ y' &= x - y(3x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Hitta en stark Ljapunovs funktion $V(x, y)$ för att visa att stationära punkten i origo är asymptotiskt stabil.

Tips. Använd $V(x, y)$ på formen $V(x, y) = ax^2 + y^2$ och välj parametern a så att $V(x, y)$ blir en stark Ljapunovs funktion. **(2p)**

3. Periodiska lösningar till ODE

Använd Poincare Bendixsons sats för att visa att ekvationssystemet

$$x' = -4y + x(1 - x^2 - y^2); \quad y' = 4x + y(1 - x^2 - y^2)$$

har mist en periodisk lösning i en ring: $\rho^2 < x^2 + y^2 < R^2$.

Tips. Använd polära koordinater och betrakta ekvationen för radien. **(4p)**

4. Asymptotiska metoder till ODE

Betrakta ekvationen $u'' + u = \epsilon(4 - u^2)u'$.

a) Beskriv ideen med direkt asymptotisk utveckling av lösning för små ϵ . Ange ekvationer för termer av ordning noll och ett i utvecklingen med avseende på ϵ . Förklara vad är seculara termer i utvecklingen. **(2p)**

b) Beskriv metoden med två tidsskalor och ange hur den skulle användas för att få fram en likformig utveckling av lösningar till givna ekvationen. Ange ekvationer för termer av ordning noll och ett i utvecklingen med avseende på ϵ . **(2p)**

5. Kemiska reaktioner och Gillespies metod

Betrakta följande reaktioner: $X + Z \xrightleftharpoons[c_2]{c_1} W, \quad W \xrightarrow{c_3} P$ där $c_i dt$ är sannolikheten

att under tiden dt reaktionen med index i skall äga rum. $i = 1, 2, 3$.

a) Ange differentialekvationer för antalet partiklar för dessa reaktioner. **(2p)**

b) Ange formler för algoritmen som skulle stokastiskt modellera dessa reaktioner enligt Gillespies metod. **(2p)**

Vänd!

Betygränser: 8 poäng - 3; 10 poäng - 4; 12 poäng - 5.

Chalmers betyg 5 svarar mot VG på GU.

Tentan omfattar totalt 16 poäng.

Uppgifter för vilka elever har bonus poäng skall inte göras på tentan.