Tentamensskrivning

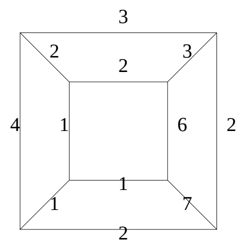
MAN240

Diskret Matematik

Onsdag den 7 juni

8.30 - 13.30

1 [5] I nedanstående graf finn ett träd som spänner av minimal vikt



2 [5] Finn upp till isomorfism alla grafer med en Hamiltoncykel, fem noder och sju kanter.

3 [5] En permutation σ säges ha ordningen n om $\sigma^N = 1$ medför N är delbart med n. En permutation av ordningen två kallas en involution. Finn antalet involutioner bland permutationerna av åtta element.

4 [5] Bestäm antalet sekvenser av fem siffror sådana att inga två konsekutiva siffror förekommer. Vi säger att ab är konsekutiva om $b = a + 1$. Således får 13746 förekomma men inte 13786 vidare är 00000 tillåten.

5 [5] Visa att den oändliga produkten

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\dots$$

kan skrivas som en rationell funktion. Vilken?

6 [10] Låt n punkter ligga på en cirkel och dra alla möjliga kordor.

a) Hur många kordor finns det?

b) Antag att inga tre kordor skär varandra i en punkt inuti cirkelskivan, hur många skärningspunkter uppkommer inuti cirkeln?

c) Låt oss definera en graf vars noder är de givna punkterna på cirkeln och de uppkomna skärningspunkterna. Och låt oss förbinda två sådana noder om de ligger på samma korda och ingen nod återfinnes mellan dem. Beräkna antalet kanter!

7 [10] Låt X vara mängden av alla kvadratiska residyer $0, 1, 4, \ldots$ i $\mathbb{Z}_p$ för p ett udda primtal. Låt $X + 1$ vara mängden som uppstår om man translaterar X med ett, d.v.s. lägger till 1 till varje element i X.

a) Ange kardinaliteten av X i termer av p

b) Ange kardinaliteten av snittet $X \cap (X + 1)$ i termer av p (notera att svaret kan bero på huruvida $p \equiv \pm 1(4)$)

Ledning: Finn antalet lösningar till ekvationen $(x - y)(x + y) = 1$ genom att notera att för varje element $\alpha \neq 0$ kan vi skriva $1 = \alpha\alpha^{-1}$

8 [10] Låt a_n vara en sekvens av heltal sådana att $a_0 = 1$ och $a_n < a_{n+1} \leq 2a_n$

a) Visa att varje heltal kan skrivas som en summa av distinkta tal i följden och således representeras av en oändlig följd av ettor och nollor med egenskapen att endast ett ändligt antal ettor kan förekomma.

b) Visa att det finns bara en följd a_n (som uppfyller villkoren ovan) sådan att representationen är unik, och ange denna.

c) Finn en rekursiv form för en talserie a_n enligt ovan sådant att varje tal kan representeras av en sträng av nollor och ettor sådana att tre ettor aldrig förekommer i rad.

Ledning: Fibonnaciserien med en viss modifikation ($F_0 = 1, F_1 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5 \ldots$) har egenskapen att tal kan representeras så att inga två ettor faller efter varandra.

9 [10] Följande tabell ger approximativa värden för 10-logaritmerna för heltalen upp till och med nio. Förklara med hjälp av denna varför vi sällan träffar på potenser av två som börjar med siffran 7 eller siffran 9.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95

Med hjälp av värdet 0.3010 för 10-logaritmen av två samt motsvarande logaritmer 0.8451 och 0.9542 för sju och nio, finn de första potenserna av 2 som börjar med 7 och 9 respektive och finn även de sista siffrorna av dessa tal! Notera att miniräknare är obehövlig.

Ulf Persson

31/5 2006

Skrivningsvakt: Johan Hartwig
tel: 076 2721861

25 poäng eller mer ger garanterat godkänt på kursen