MATEMATIK Hjälpmedel: inga
Göteborgs universitet Telefonvakt/rond:
H.S.K. Håkan Samuelsson Kalm, 772 35 68

Tentamen i Analytiska funktioner, MMG700

Fredagen den 30 oktober 2015, $8^{30} - 12^{30}$

---

1. Visa att om $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ är holomorf i $D(0, 1)$ så uppfyller u och v Cauchy-Riemanns ekvationer i $D(0, 1)$. (3p)

2. Visa att om f är holomorf i $D(0, 1)$ så är $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ för $z \in D(0, 1)$. (3p)

3. Visa att om f är holomorf i $\mathbb{C}$ och $f(\mathbb{C}) \subset \{z;\ |z| \geq 1\}$ så är f konstant. (3p)

4. Bestäm Laurentutvecklingen av $1/(z^2(z - 1))$ i $\{z;\ 0 < |z - 1| < 1\}$. (3p)

5. Hur många nollställen har $5z^6 + z^4 - z + 2$ i $D(0, 1)$? (3p)

6. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$. (3p)

7. Avbilda området $\{z;\ |z - i| < \sqrt{2},\ |z + i| < \sqrt{2}\}$ konformt på $D(0, 1)$. (3p)

8. Motivera dina svar på följande frågor.

   (a) Finns det en holomorf funktion f i $\mathbb{C}$ sådan att $f(0) = 1$ och $f(1 - \frac{1}{2n}) = 0$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$? (1p)

   (b) Finns det en holomorf funktion f i $D(0, 1)$ sådan att $f(0) = 1$ och $f(1 - \frac{1}{2n}) = 0$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$? (2p)

Lycka till! /H.S.K.