Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 30 oktober 2015

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

2. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

3. Enligt förutsättningarna är $|f(z)| \geq 1$ för alla $z \in \mathbb{C}$ så $g := 1/f$ är holomorf i $\mathbb{C}$ och $|g(z)| \leq 1$ för alla $z \in \mathbb{C}$; obs också att $g \neq 0$. Enligt Liouvilles sats är $g \equiv C$ där C är en konstant som måste vara nollskild. Alltså är $f \equiv 1/C$.

4. Vi utvecklar först $1/z$ i potenser av $z-1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \tag{1}$$

och serien är absolutkonvergent för $|z-1| < 1$. Deriverar vi (1) får vi

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k (z-1)^{k-1}$$

som också är ok för $|z-1| < 1$. Alltså får vi

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k (z-1)^{k-1} = \sum_{\ell=-1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} (\ell+2)(z-1)^{\ell}$$

som måste vara den sökta Laurentutvecklingen.

5. Sätt $f(z) = 5z^6$ och $g = z^4 - z + 2$. För $|z| = 1$ har vi enligt triangelolikheten att

$$|f(z)| = |5z^6| = 5$$

$$|g(z)| = |z^4 - z + 2| \leq |z|^4 + |z| + 2 = 4.$$

Så $|f(z)| > |g(z)|$ för z på randen av $D(0,1)$. Enligt Rouchés sats har $f(z) = 5z^6$ lika många nollställen som $f(z) + g(z) = 5z^6 + z^4 - z + 2$ i $D(0,1)$. Funktionen f har 6 nollställen i $D(0,1)$ så även $f+g$, har 6 nollställen i $D(0,1)$.

6. Observera först att $\sin x/(x^4 + 2x^2 + 1)$ är en udda funktion på $\mathbb{R}$ så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = 0.$$

Låt nu $f(z) := e^{iz}/(z^4 + 2z^2 + 1) = e^{iz}/(z+i)^2(z-i)^2$. Då är f meromorf i $\mathbb{C}$ med dubbla poler i $\pm i$ och

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\Big)\Big|_{z=i} = \cdots = -\frac{i}{2e}.$$

Låt γ_1^R vara linjen från $-R$ till R och låt γ_2^R vara halvcirkeln i övre halvplanet med start i R och slut i $-R$. Vi har att

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^4+2x^2+1} dx = \int_{\gamma_1^R+\gamma_2^R} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2^R} f(z)\, dz$$

Den första integralen i höger led räknar vi med residysatsen:

$$\int_{\gamma_1^R+\gamma_2^R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = -2\pi i \frac{i}{2e} = \frac{\pi}{e}.$$

För den andra integralen i höger led gör vi uppskattningarna:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2^R} f(z)\, dz \right| &\leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{R^4e^{4i\theta}+2R^2e^{2i\theta}+1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^4-2R^2-1} Rd\theta \\ &\leq \frac{\pi R}{R^4-2R^2-1} = \mathcal{O}(1/R^3). \end{aligned}$$

Vi får nu:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^4+2x^2+1} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+2x^2+1} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^4+2x^2+1} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \mathfrak{Re} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^4+2x^2+1} dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \mathfrak{Re}(\pi/e + \mathcal{O}(1/R^3)) = \pi/e. \end{aligned}$$

7. Beteckna cirkeln $|z-i| = \sqrt{2}$ med C_1 och cirkeln $|z+i| = \sqrt{2}$ med C_2. Båda cirklarna går genom punkterna -1 och 1; cirkeln C_1 skär imaginäraxeln i punkten $i(1-\sqrt{2})$ och C_2 skär imaginäraxeln i punkten $i(\sqrt{2}-1)$. Låt $f_1(z) := (z+1)/(z-1)$. Under f_1 avbildas C_1 och C_2 på linjer genom 0 eftersom $f_1(-1) = 0$ och $f_1(1) = \infty$. Dessutom

$$f_1\big((1-\sqrt{2})i\big) = \cdots = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1-i),$$

$$f_1\big((\sqrt{2}-1)i\big) = \cdots = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1+i).$$

Så delen av C_1 i undre halvplanet med start i -1 och slut i 1 avbildas på strålen, med start i 0, som går genom $1-i$; delen av C_2 i övre halvplanet med start i -1 och slut i 1 avbildas på strålen, med start i 0, som går genom $1+i$. Det följer att området begränsat av C_1 och C_2 avbildas på sektorn $\{w;\ -\pi/4 < \arg w < \pi/4\}$.

Låt $f_2(w) := w^2$; då avbildar f_2 sektorn $\{w;\ -\pi/4 < \arg w < \pi/4\}$ på höger halvplan. Sätt $f_3(\zeta) := (\zeta-1)/(\zeta+1)$, som avbildar höger halvplan på enhetsdisken. Avbildningen $f := f_3 \circ f_2 \circ f_1$ är alltså en konform avbildning av området begränsat av C_1 och C_2 på enhetsdisken. Om man vill kan man skriva upp $f(z)$:

$$f(z) = \frac{(\frac{z+1}{z-1})^2 - 1}{(\frac{z+1}{z-1})^2 + 1}.$$

8. (a) Svar: Nej! En sådan funktion skulle inte ha diskret nollställemängd i $\mathbb{C}$ och skulle enligt identitetssatsen vara identiskt noll och därmed inte kunna anta värdet 1 i origo.

   (b) Svar: Ja! T.ex. är $f(z) = \sin \dfrac{\pi/2}{1-z}$ en sådan funktion.