Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 18 augusti 2017

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

2. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

3. Vi skall utveckla i potenser av $z-2$. Efter faktorisering av nämnaren får vi

$$\frac{1}{z^2-z-2} = \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1/3}{1+(z-2)/3}.$$

I aktuellt område är $|z-2| < 3$ så formeln för geometrisk serie ger att

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-(z-2)/3)^k$$

i aktuellt område. Alltså får vi

$$\frac{1}{z^2-z-2} = -\frac{1}{9} \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^k (z-2)^k.$$

4. Låt $f(z) = z^4$ och $g(z) = 2z + 10$ och observera att $p(z) = f(z) + g(z)$. Om $|z| = 2$ gäller

$$|g(z)| \leq 2 \cdot 2 + 10 = 14 < 16 = |f(z)|,$$

så enligt Rouches sats har $f + g$ lika många nollställen i $D(0,2)$ som $f(z) = z^4$ har, dvs. 4 stycken.

Om $|z| = 1$ gäller istället

$$|g(z)| \geq 10 - 2 \cdot 1 = 8 > 1 = |f(z)|,$$

så enligt Rouche har $f + g$ lika många nollställen i $D(0,1)$ som $g(z) = 2z + 10$ har, dvs. inga. (Obs också att eftersom $|f| < |g|$ för $|z| = 1$ är $f + g \neq 0$ för $|z| = 1$.) Det följer att $p = f + g$ har 4 nollställen i $D(0,2) \setminus \overline{D(0,1)} = \{z;\ 1 < |z| < 2\}$.

5. Låt $\gamma_1(R)$ vara linjestycket från $z = -R$ till $z = R$ och låt $\gamma_2(R)$ vara övre delen av $|z| = R$ orienterad moturs. För $R > 1$ har $1/(1+z^4)$ två poler i området begränsat av $\gamma_1(R)$ och $\gamma_2(R)$, nämligen $a_1 = e^{i\pi/4}$ och $a_2 = e^{i3\pi/4}$. Enligt Cauchys residysats gäller (för $R > 1$) att

$$(*) \quad \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \int_{\gamma_1(R)} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}_{a_j} \frac{1}{1+z^4} - \int_{\gamma_2(R)} \frac{dz}{1+z^4}.$$

Men

$$\left| \int_{\gamma_2(R)} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq \frac{1}{R^4-1} \cdot \text{längd}(\gamma_2(R)) = \frac{\pi R}{R^4-1}$$

så

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2(R)}\frac{dz}{1+z^4}=0$$

och från $(*)$ får vi alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}_{a_j}\frac{1}{1+z^4}.$$

För att beräkna högerledet använder vi (t.ex.) residyregel 2:

$$2\pi i\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}_{a_j}\frac{1}{1+z^4}=2\pi i(\frac{1}{4a_1^3}+\frac{1}{4a_2^3})=\cdots=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6. f överensstämmer med funktionen $z\mapsto -iz$ på imaginäraxeln så identitetssatsen ger att $f(z)=-iz$ för alla $z\in\mathbb{C}$. Alltså är $f(1)=-i$.

7. Sätt $\Omega_1=\{z;\ |z+1|>1,\ |z-1|>1\}$ och låt $f_1(z)=1/z$. Cirkeln $|z-1|=1$ avbildas på linjen $\operatorname{Re}z=1/2$, cirkeln $|z+1|=1$ avbildas på linjen $\operatorname{Re}z=-1/2$ och vi ser att f_1 avbildar Ω_1 på stripen $-1/2<\operatorname{Re}z<1/2$, som vi kallar Ω_2.

   Låt $f_2(z)=e^{i\pi z}$. Linjen $\operatorname{Re}z=1/2$ avbildas på positiva imaginäraxeln, linjen $\operatorname{Re}z=-1/2$ avbildas på negativa imaginäraxeln och vi ser att f_2 avbildar Ω_2 på höger halvplan.

   Höger halvplan avbildas konformt på $D(0,1)$ med $f_3(z)=(z-1)/(z+1)$ och en lösning på vårt problem är

$$f_3\circ f_2\circ f_1(z)=\frac{e^{i\pi/z}-1}{e^{i\pi/z}+1}.$$

8. Låt $\varphi(z)=(z-1)/(z+1)$; φ avbildar då H på $D(0,1)$ och $\varphi(1)=0$ så sammansättningen $g=\varphi\circ f$ är en holomorf avbildning $D(0,1)\to D(0,1)$ sådan att $g(0)=0$. Schwarz lemma ger direkt att $|g(z)|\le|z|$, men

$$g'(0)=\varphi'(f(0))f'(0)=\frac{2f'(0)}{(f(0)+1)^2}=1$$

   så det följer i själva verket från Schwarz lemma att $g(z)=z$, dvs.

$$\frac{f(z)-1}{f(z)+1}=z.$$

   Löser vi ut $f(z)$ ur denna likhet får vi att $f(z)=(1+z)/(1-z)$.