MATEMATIK
Göteborgs universitet
Håkan Samuelsson Kalm

Hjälpmedel: Bifogat formelblad
Telefonvakt/rond:
Raad Salman, 772 53 25

Tentamen i Analytiska funktioner, MMG700

Fredagen den 19 augusti 2016, $14^{00} - 18^{00}$

1. (a) Definiera vad som menas med att en holomorf funktion f har ett nollställe *med multiplicitet* (alt. *av ordning*) m i en punkt a. (1p)

   (b) Visa att om f är holomorf i en omgivning av $\overline{D(0,1)}$ och $f(z) \neq 0$ för $z \in \partial D(0,1)$ så är $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ antal nollställen till f i $D(0,1)$ räknade med multiplicitet. (2p)

2. Formulera och bevisa Laurents sats. (3p)

3. Visa att om $f(z) = f(x+iy)$ är holomorf så är $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}$. (3p)

4. Hur många nollställen har polynomet $2 + z + z^2/2 + z^3/3$ i $D(0,1)$? (3p)

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin z - \tan z}{z^3}$. (3p)

6. Avbilda området $\{z;\ \mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ (dvs. fjärde kvadranten) konformt på $D(0,1)$. (3p)

7. Bestäm bilden av området $\{z;\ |z| < 1,\ |z - i/2| > 1/2\}$ under avbildningen $z \mapsto e^{2/(z-i)}$. (3p)

8. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$. (3p)

Lycka till! /H.S.K.