Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 19 augusti 2016

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

2. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

3. Eftersom f är holomorf existerar gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \tag{1}$$

och är definitionsmässigt $f'(z)$, för all z i området där f är holomorf. Låter vi $h \to 0$ i (1) och dessutom kräver att $\operatorname{Im} h = 0$ så blir gränsvärdet $\partial f/\partial x$. Alltså gäller $f' = \partial f/\partial x$. Likheten $\partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$ är (ekvivalent med) Cauchy-Riemanns ekvationer, som är uppfyllda då f är holomorf.

4. Låt $f(z) = 2$ och $g(z) = z + z^2/2 + z^3/3$. För $z \in \partial D(0,1)$, dvs. för z så att $|z| = 1$, gäller enligt triangelolikheten att

$$|g(z)| = |z + z^2/2 + z^3/3| \leq 1 + 1/2 + 1/3 < 2 = |f(z)|.$$

Enligt Rouchés sats har därför f och $f + g$ lika många nollställen i $D(0,1)$. Alltså har polynomet $2 + z + z^2/2 + z^3/3$ inga nollställen i $D(0,1)$.

5. Vi har att $g(z) := \sin z - \tan z$ är holomorf i en omgivning till $\overline{D(0,1)}$ eftersom $\tan z = \sin z/\cos z$ och $\cos z \neq 0$ i en omgivning till $\overline{D(0,1)}$. Alltså har $g(z)/z^3$ en pol av ordning ≤ 3 i origo men inga andra poler i en omgivning till $\overline{D(0,1)}$. Residyregel 1 ger att $\operatorname{Res}_0 g(z)/z^3 = g^{(2)}(0)/2! = \cdots = 0$ så enligt Cauchys residysats blir den sökta integralen 0.

6. Avbildningen $f_1(z) := iz$ är konform då $f_1' \neq 0$, och vrider planet 90 grader moturs; bilden av fjärde kvadranten under f_1 är alltså första kvadranten. Avbildningen $f_2(z) := z^2$ är konform utanför origo och avbildar första kvadranten på övre halvplanet. Avbildningen $f_3(z) := (z-i)/(z+i)$ är konform och avbildar övre halvplanet på $D(0,1)$. Alltså, sammansättningen

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \cdots = \frac{z^2+i}{z^2-i}$$

är en konform avbildning av fjärde kvadranten på $D(0,1)$.

7. Låt $f(z) := 2/(z-i)$, som är en Möbiusavbildning och alltså speciellt avbildar cirklar på cirklar eller linjer. Räkning ger att $f(-1) = i - 1$, $f(i) = \infty$ och $f(1) = 1 + i$ så f avbildar enhetscirkeln på den horisontella linjen ℓ_1 som går igenom $1+i$ och $i-1$. Ytterligare räkning ger att $f(0) = 2i$ och $f(1/2 + i/2) = 2 + 2i$ och det följer att f avbildar cirkeln $|z - i/2| = 1/2$ på den horisontella linjen ℓ_2 genom $2i$ och $2 + 2i$. Eftersom dessutom $f(1/2) = 4/5 + 8i/5$, som ligger i stripen S

begränsad av ℓ_1 och ℓ_2, följer det att bilden av området $\{|z| < 1, |z - i/2| > 1/2\}$ under f är stripen S.

Låt $g(w) = e^w$ och observera att $g \circ f(z) = e^{2/(z-i)}$. Från vad vi hittills gjort skall vi alltså bestämma bilden av stripen S under g: OBS att $S = \{w;\, 1 < \operatorname{Im} w < 2\}$ och att $g(w) = e^{\operatorname{Re} w} \cdot e^{i \operatorname{Im} w}$ så att

$$g(S) = \{\zeta = e^{\operatorname{Re} w} \cdot e^{i\operatorname{Im} w};\, 1 < \operatorname{Im} w < 2\} = \{\zeta = re^{i\theta};\, 1 < \theta < 2\}.$$

Den sökta bilden är alltså sektorn $\{\zeta = re^{i\theta};\, 1 < \theta < 2\}$.

8. Vi skall beräkna $\int_0^\infty dx/(1+x^3) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R dx/(1+x^3) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1^R} dz/(1+z^3)$ där γ_1^R är kurvan $t \mapsto t$, $0 \le t \le R$. Låt γ_2^R vara kurvan $t \mapsto Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi/3$, och γ_3 vara kurvan $t \mapsto (R-t)e^{i2\pi/3}$, $0 \le t \le R$. Då är kurvan $\gamma^R := \gamma_1^R + \gamma_2^R + \gamma_3^R$ en sluten kurva som omsluter en tårtbit"T_R. Funktionen $f(z) := 1/(1+z^3) = (z+1)^{-1}(z - e^{-i\pi/3})^{-1}(z - e^{i\pi/3})^{-1}$ har en enkelpol i $z = e^{i\pi/3}$ men är i övrigt holomorf i en omgivning av $\overline{T_R}$. Cauchys residysats och residyregel 1 ger att

$$\int_{\gamma^R} \frac{dz}{1+z^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{i\pi/3}} f = 2\pi i \frac{1}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})}.$$

Med triangelolikheten är, för $R > 1$,

$$\left| \int_{\gamma_2^R} \frac{dz}{1+z^3} \right| = \left| \int_0^{2\pi/3} \frac{Re^{it} i dt}{1 + R^3 e^{i3t}} \right| \le \int_0^{2\pi/3} \frac{R dt}{R^3 - 1} = \mathcal{O}(R^{-2}),$$

och alltså är $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2^R} dz/(1+z^3) = 0$. Vidare,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3^R} \frac{dz}{1+z^3} &= \int_0^R \frac{-e^{i2\pi/3} dt}{1 + (R-t)^3 e^{i2\pi}} = \Big\{ x := R - t \Big\} = -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} \\ &= -e^{i2\pi/3} \int_{\gamma_1^R} \frac{dz}{1+z^3}. \end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})} &= \int_{\gamma_1^R} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{\gamma_2^R} \frac{dz}{1+z^3} + \int_{\gamma_3^R} \frac{dz}{1+z^3} \\ &= (1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} + \mathcal{O}(R^{-2}) \end{aligned}$$

och vi får, efter gränsövergång, att

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})(1 - e^{i2\pi/3})} = \cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$