MATEMATIK
Göteborgs universitet
Håkan Samuelsson Kalm

Hjälpmedel: Bifogat formelblad
Telefonvakt/rond:
Anna Persson, 772 53 25

Tentamen i Analytiska funktioner, MMG700

Tisdagen den 3 januari 2017, $14^{00} - 18^{00}$

1. Formulera och bevisa Moreras sats. (Du får använda resultatet att en holomorf funktion har holomorf derivata.) (3p)

2. Visa att om $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ är komplext deriverbar i punkten $a \in D(0,1)$ så uppfyller f Cauchy-Riemanns ekvationer i a. (3p)

3. Visa att om f är holomorf i $\mathbb{C}$ och $f(x+1) = f(x)$ för alla reella x så är $f(z+1) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$. (3p)

4. Bestäm principaldelen av Laurentutvecklingen av $\dfrac{e^z}{z(z-1)}$ i området $\{z;\, 0 < |z-1| < 1\}$. (3p)

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^2 - 2i}$. (3p)

6. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + a^2}$ för alla konstanter $a > 0$. (3p)

7. Bestäm bilden av området $\{z;\, |z - 1/2| > 1/2, \operatorname{Im} z \neq 0\}$ under avbildningen $z \mapsto \dfrac{iz}{z-1}$. (3p)

8. Visa att om $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är holomorf och $|f(z)| \leq |z|^3$ för alla $z \in \mathbb{C}$ så är $f(z) = Az^3$ för alla $z \in \mathbb{C}$ och en konstant A med $|A| \leq 1$. (3p)

Lycka till! /H.S.K.