Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 3 januari 2017

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.
2. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.
3. Sätt $g(z) := f(z+1) - f(z)$. Då är g holomorf i $\mathbb{C}$ och $g(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Enligt identitetssatsen är $g = 0$ så $f(z+1) = f(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$.
4. Vi börjar med att uttrycka $1/z$ i potenser av $z-1$; vi har, för $|z-1| < 1$, att

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-(z-1))^k.$$

Dessutom, för alla $z \in \mathbb{C}$, gäller

$$e^z = e^{z-1+1} = e \cdot e^{z-1} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}.$$

För $0 < |z-1| < 1$ får vi alltså

$$\frac{e^z}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-(z-1))^k e\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(z-1)^\ell}{\ell!} = \frac{e}{z-1} + h(z),$$

där h är holomorf för $|z-1| < 1$. Principaldelen i sökta området är då $e/(z-1)$.

5. Sätt $f(z) := z^3/(z^2 - 2i)$. Nämnaren, $z^2 - 2i$, har två nollställen, nämligen $a_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$ och $a_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -1 - i = -a_1$, vilka båda är i disken $\{z;\, |z| < 2\}$. Enligt t.ex. residyregel 1 är

$$\mathrm{Res}_{a_1} f = \frac{z^3}{z-a_2}\bigg|_{z=a_1} = \frac{a_1^3}{2a_1} = a_1^2/2,$$

$$\mathrm{Res}_{a_2} f = \frac{z^3}{z-a_1}\bigg|_{z=a_2} = \frac{a_2^3}{2a_2} = a_2^2/2 = a_1^2/2.$$

Cauchys residysats ger då

$$\int_{|z|=2}\frac{z^3dz}{z^2-2i} = 2\pi i(\mathrm{Res}_{a_1} f + \mathrm{Res}_{a_2} f) = 2\pi i a_1^2 = -4\pi.$$

6. Sätt $f(z) = e^{iaz}/(z^2 + a^2)$ och observera att $\mathrm{Re}\, f(x) = \cos(ax)/(x^2 + a^2)$ för $x \in \mathbb{R}$. Låt γ_1^R vara intervallet $[-R, R]$ genomlöpt från vänster till höger och låt γ_2^R vara halvcirkeln i övre halvplanet centrerad i origo med radie R med start i $z = R$ och slut i $z = -R$. Kurvan $\gamma_1^r + \gamma_2^R$ omsluter enkelpolen $z = ia$ till f (för R tillräckligt stor), och enligt t.ex. residyregel 1 är

$$\mathrm{Res}_{ia} f = \frac{e^{iaz}}{z+ia}\bigg|_{z=ia} = \frac{e^{-a^2}}{2ia}.$$

Från Cauchys residysats får vi för R tillräckligt stort

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_1^R} f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-a^2}}{2ia} \qquad (*)$$

och ML-olikheten ger

$$\left| \int_{\gamma_2^R} f(z)dz \right| \leq R\pi \sup_{z\in\gamma_2^R} \left| \frac{e^{az}}{z^2+a^2} \right| \leq R\pi \sup_{z\in\gamma_2^R} \frac{e^{-a\operatorname{Im} z}}{|z|^2-a^2} \leq \frac{R\pi}{R^2-a^2} \to 0,\ R\to\infty.$$

Låter vi $R\to\infty$ i $(*)$ får vi alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+a^2} = 2\pi i \frac{e^{-a^2}}{2ia},$$

vilket slutligen ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2+a^2} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+a^2} = \operatorname{Re} \frac{2\pi i e^{-a^2}}{2ia} = \frac{\pi e^{-a^2}}{a}.$$

7. Sätt $f(z) = iz/(z-1)$, som är en Möbiusavbildning, och låt C vara cirkeln $\{z;\ |z-1/2| = 1/2\}$. Insättning ger

$$f(0)=0, \quad f(1/2+i/2)=1, \quad f(1)=\infty, \quad f(\infty)=i.$$

Möbiusavbildningar avbildar cirklar/linjer på cirklar/linjer så det följer att bilden av C, genomlöpt medurs, är realaxeln genomlöpt från vänster till höger; bilden av negativa realaxeln genomlöpt från höger till vänster är linjestycket från 0 till i; bilden av $\{x\in\mathbb{R};\ x>1\}$ genomlöpt från ∞ till 1 är strålen längs imaginäraxeln från i till ∞. Vidare, Möbiusavbildningar är bijektiva (från $\mathbb{P}^1$ till $\mathbb{P}^1$) och konforma, så bilden av området $\{z;\ |z-1/2|>1/2,\ \operatorname{Im} z\neq 0\}$ blir övre halvplanet förutom positiva imaginäraxeln.

8. Enligt Taylors sats är $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, där serien konvergerar absolut i $\mathbb{C}$ och

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}}$$

för godtyckligt $r>0$. Från ML-olikheten och förutsättningen $|f(z)|\leq |z|^3$ får vi

$$|c_k| \leq r \sup_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}} \leq r \sup_{|z|=r} |z|^{3-k-1} = r^{3-k}. \qquad (**)$$

För $k>3$ är $3-k<0$, så låter vi $r\to\infty$ i $(**)$ får vi $c_k=0$ för $k>3$. För $k<3$ låter vi $r\to 0$ i $(**)$ och ser att $c_k=0$ för $k<3$. Alltså är $f(z)=c_3z^3$ och eftersom $|f(z)|\leq|z|^3$ måste $|c_3|\leq 1$.