Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 5 januari 2016

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

2. Se beviset för maximumprincipen.

3. Vi gjorde denna uppgift på föreläsningen som en tillämpning på Laurents sats. Enligt denna kan f framställas som Laurentserie $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ och koefficienterna c_n kan beräknas som
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$
för godtyckligt r sådant att $0 < r < 1$. Det följer att
$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot \text{längd}(\{z; |z| = r\}) \leq \frac{1}{r^n}.$$
För negativa n gäller att $\lim_{r\to 0} 1/r^n = 0$ så $c_n = 0$ för negativa n. Alltså är $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ och det följer att f har en holomorf utvidgning till hela $D(0,1)$.

4. Vi har $\tan z = \sin z / \cos z$ och i $D(1,1)$ har $\cos z$ ett enkelt nollställe i $z = \pi/2$. Så $\tan z$ har en enkel pol i $D(1,1)$ och t.ex. enligt residyregel 2 gäller
$$\text{Res}_{\pi/2} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1.$$
Från residysatsen får vi sedan
$$\int_{\partial D(1,1)} \frac{\sin z}{\cos z}\,dz = 2\pi i \text{Res}_{\pi/2} \frac{\sin z}{\cos z} = -2\pi i.$$
Anmärkning: Eftersom $D \sin z = \cos z$ verkar vid första anblick argumentprincipen kunna användas för beräkna den sökta integralen. Men $\sin z$ har ett nollställe på $\partial D(1,1)$ så denna är inte utan vidare tillämpbar.

5. Eftersom integranden är en jämn funktion och $\text{Re}\, e^{ix} = \cos x$ för reella x har vi att
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \\ &= \text{Re}\left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \right). \end{aligned} \tag{1}$$
Sätt $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$, låt γ_R vara halvcirkeln $\{z = Re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$ orienterad moturs och låt Γ_R vara den slutna kurvan $[-R, R] + \gamma_R$. Vi har att
$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz;$$

notera att integralen vi vill räkna ut är lika med $\lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)dx\right)$.

Vi räknar först ut $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ med residysatsen: Inuti Γ_R har $f(z)$ två enkelpoler, en i $z=1$ och en i $z=2$. Med t.ex. residyregel 1 får vi att

$$\operatorname{Res}_i f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i} = \cdots = \frac{1}{6ie},$$

$$\operatorname{Res}_{2i} f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\Big|_{z=2i} = \cdots = -\frac{1}{12ie^2},$$

och följdaktligen

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{6ie} - \frac{1}{12ie^2}\right) = \cdots = \frac{\pi}{6e^2}(2e-1).$$

Vi hoppas att $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ och för att visa det parametriserar vi först γ_R med $z = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, och får

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}\,d\theta}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+4)}.$$

Alltså,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}\cdot R\,d\theta}{(R^2-1)(R^2-4)} \le \frac{2\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} = \mathcal{O}(1/R^3), \qquad (2)$$

där den första olikheten följer från omvända triangelolokheten och att $\left|e^{iRe^{i\theta}}\right| = e^{-R\sin\theta}$; den andra olikheten följer eftersom $e^{-R\sin\theta}\le 1$ för $0\le\theta\le\pi$. Från (2) ser vi att $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Det följer alltså att

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R} f(z)dz - \int_{\gamma_R} f(z)dz\right) = \frac{\pi}{6e^2}(2e-1)$$

och den sökta integralen blir således $\frac{\pi}{12e^2}(2e-1)$.

6. För $|z|=1$ gäller att $|z^2+1|\le |z|^2+1 = 2 < 3 = |3z^3|$ så enligt Rouchés sats har $3z^3$ och $p(z) = 3z^3+z^2+1$ lika många nollställen i $D(0,1)$, dvs. tre stycken.

   För $|z| = 1/2$ gäller att $|3z^3+z^2| \le 3|z|^3+|z|^2 = 3/8+1/4 = 5/8 < 1$ så funktionen 1 och $p(z)$ har lika många nollställen i $D(0,1/2)$, dvs. inga alls.

   Tredjegradspolynomet $p(z)$ har alltså tre nollställen i $\{z;\ 1/2 < |z| < 1\}$, dvs. p har alla sina nollställen där.

7. Vi börjar med att partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2}$$

och ”handpåläggning” ger

$$A = \frac{1}{(z+1)(z+2)}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{z(z+2)}\Big|_{z=-1} = -1, \quad C = \frac{1}{z(z+1)}\Big|_{z=-2} = \frac{1}{2}.$$

Alltså,

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2(z+2)}.$$

För $|z| > 1$ har vi att

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-1/z)} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty \Big(-\frac{1}{z}\Big)^k$$

och för $|z| < 2$ att

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-z/2)} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \Big(-\frac{z}{2}\Big)^k.$$

Följdaktligen får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\sum_0^\infty \Big(-\frac{1}{z}\Big)^k + \frac{1}{4}\sum_0^\infty \Big(-\frac{z}{2}\Big)^k \\ &= \sum_{\ell=-2}^{-\infty} (-z)^\ell - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^\infty \Big(-\frac{1}{2}\Big)^k z^k.\end{aligned}$$

8. Låt $f(z) := \dfrac{1+z}{1-z}$; då blir $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = \infty$ och $f(i) = \cdots = i$. Vi ser att linjesegmentet $[-1,1]$ avbildas på $[0,\infty]$, halvcirkeln $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ avbildas på positiva imaginäraxeln och området $\Omega := \{z;\, |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ avbildas surjektivt på första kvadranten. Vi noterar också att $f(i/(1+\sqrt{2})) = \cdots = (1+i)/\sqrt{2}$.

Låt $g(z) := z^2$; g avbildar första kvadranten surjektivt på övre halvplanet och $g((1+i)/\sqrt{2}) = \cdots = i$.

Låt slutligen $h(z) := \dfrac{z-i}{z+i}$, som avbildar övre halvplanet surjektivt på $D(0,1)$. Avbildningen

$$\varphi(z) := h \circ g \circ f(z) = \frac{(\frac{1+z}{1-z})^2 - i}{(\frac{1+z}{1-z})^2 + i}$$

är nu konform och avbildar Ω surjektivt på $D(0,1)$. Dessutom,

$$\varphi(i/(1+\sqrt{2})) = h(g(f(i/(1+\sqrt{2})))) = h(g((1+i)/\sqrt{2})) = h(i) = 0,$$

så φ uppfyller alla kraven.

Anmärkning: Om man på något annat sätt hittar en konform avbildning ψ som avbildar Ω surjektivt på $D(0,1)$ är det inte säkert att ψ avbildar punkten $z = i/(1+\sqrt{2})$ på origo men detta kan avhjälpas genom att sätta samman med lämplig automorfism av $D(0,1)$: Om $\psi(i/(1+\sqrt{2})) = a \in D(0,1)\setminus\{0\}$, låt $\varphi_a(z) := \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$; φ_a avbildar $D(0,1)$ surjektivt på $D(0,1)$ och $\varphi_a(a) = 0$ så sammansättningen $\varphi_a \circ \psi$ har de önskade egenskaperna.