Lösningsförslag

Analytiska funktioner, MMG700, tenta 28 oktober 2016

---

1. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

2. Se kurslitteraturen eller anteckningarna.

3. Funktionen $g(z) := f(z) - z$ är holomorf i $\mathbb{C}$ och $g(1-1/n) = f(1-1/n) - (1 - 1/n) = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, så 1 är en hopningspunkt för nollställemängden till g. Enligt identitetssatsen är $g \equiv 0$, dvs. $f(z) = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Alltså är $f(2) = 2$.

4. Från Taylorutvecklingarna av $\sinh z$ och $\sin z$ ser vi att

$$\sinh z - \sin z = \frac{2z^3}{3!} + \frac{2z^7}{7!} + \cdots = \frac{z^3}{3}\big(1 + z^4 h(z)\big),$$

där h är en holomorf funktion i $\mathbb{C}$. För z i en punkterad omgivning av 0 gäller då enligt formeln för geometrisk summa att

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh z - \sin z} &= \frac{3}{z^3}\frac{1}{1+z^4h(z)} = \frac{3}{z^3}\big(1 - z^4h(z) + (z^4h(z))^2 - (z^4h(z))^3 + \cdots\big) \\ &= \frac{3}{z^3}\big(1 + z^4 g(z)\big) = \frac{3}{z^3} + 3zg(z),\end{aligned}$$

där g är holomorf i en omgivning av 0. Principaldelen av Laurentutvecklingen är alltså $3/z^3$.

5. Sätt $f(z) := z^3 + 1$ och $g(z) := z^2$. Om $|z| = 3/4$ gäller:

$$|f(z)| \geq 1 - |z|^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{64-27}{64} = \frac{37}{64} > \frac{36}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = |g(z)|,$$

och om $|z| = 3/2$ gäller:

$$|f(z)| \geq |z|^3 - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 = \frac{27-8}{8} = \frac{19}{8} > \frac{18}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = |g(z)|.$$

Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$ för z på randen av området $\Omega := \{z;\ 3/4 < |z| < 3/2\}$ och enligt Rouchés sats har f och $f+g$ lika måga nollställen i Ω. Eftersom f har tre nollställen (-1 och $e^{\pm i\pi/3}$) i Ω har också $z^3 + z^2 + 1$ tre nollställen i Ω.

6. Låt $\Omega := \{z;\, 0 < \arg z < \pi/2,\, |z| < 1\}$. Sätt $f_1(z) := z^2$, som är konform i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Då är $f_1(\Omega) = \{z;\, |z| < 1,\, \operatorname{Im} z > 0\}$. Sätt $f_2(z) := (z+1)/(z-1)$. Då är

$$f_2(-1) = 0, \quad f_2(0) = -1, \quad f_2(1) = \infty, \quad f_2(i) = \cdots = -i.$$

Eftersom f_2 avbildar cirklar/linjer på cirklar/linjer följer att f_2 avbildar linjestycket mellan -1 och 1 på negativa realaxeln och halvcirkeln $\{z;\ |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 1\}$ på negativa imaginäraxeln. Eftersom f_2 är konform blir $f_2(f_1(\Omega))$ tredje kvadranten.

Sätt $f_3(z) := z^2$; f_3 avbildar då tredje kvadranten surjektivt på övre halvplanet. Alltså är

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2$$

en surjektiv konform avbildning från Ω till övre halvplanet.

7. Andragradsekvationen $z^2+2z+a=0$ har, för $a>1$, lösningarna $z=-1\pm i\sqrt{a-1}$, så $f(z) := e^{iz}/(z^2+2z+a)$ har enkelpoler i $z=-1\pm i\sqrt{a-1}$ och enligt residyregel 2 är

$$\mathrm{Res}_{-1+i\sqrt{a-1}}\, f(z) = \frac{e^{iz}}{2z+2}\bigg|_{z=-1+i\sqrt{a-1}} = \frac{e^{-\sqrt{a-1}}e^{-i}}{2i\sqrt{a-1}}.$$

Låt γ_1^R vara linjen från $-R$ till R och låt γ_2^R vara halvcirkeln i övre halvplanet med start i R och slut i $-R$. Enligt Cauchys residysats gäller nu att

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{-1+i\sqrt{a-1}}\, f(z) = \frac{\pi e^{-\sqrt{a-1}}e^{-i}}{\sqrt{a-1}}. \qquad (*)$$

Vidare, enligt ML-olikheten, har vi för R tillräckligt stort att

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| &\le \sup_{z\in\gamma_2^R}\left|\frac{e^{iz}}{z^2+2z+a}\right|\pi R \le \sup_{z\in\gamma_2^R}\frac{e^{\mathrm{Re}(iz)}}{|z|^2-2|z|-a}\pi R \\ &= \sup_{z\in\gamma_2^R}\frac{e^{-\mathrm{Im}\, z}}{R^2-2R-a}\pi R \le \frac{1}{R^2-2R-a}\pi R \to 0,\ R\to\infty.\end{aligned}$$

Så från $(*)$ följer att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi e^{-\sqrt{a-1}}e^{-i}}{\sqrt{a-1}}$ och alltså är

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+a}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{Im}\,\frac{\pi e^{-\sqrt{a-1}}e^{-i}}{\sqrt{a-1}} = \frac{-\pi e^{-\sqrt{a-1}}\sin 1}{\sqrt{a-1}}.$$

8. Enligt Taylors sats har f en Taylorutveckling som konvergerar i en omgivning till $\overline{D(0,1)}$, och eftersom f har ett nollställe av ordning m i origo, men inga andra nollställen, gäller att

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty}\frac{f^{(j)(0)}}{j!}z^k = z^k\left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}z + \cdots\right) = z^k g(z),$$

där g är holomorf och nollskild i en omgivning till $\overline{D(0,1)}$, $g(0) = f^{(k)}(0)/k!$ och $g'(0) = f^{(k+1)}(0)/(k+1)!$. Vi får:

$$\frac{f'(z)}{zf(z)} = \frac{\left(z^k g(z)\right)'}{z^{k+1}g(z)} = \frac{kz^{k-1}g(z)+z^k g'(z)}{z^{k+1}g(z)} = \frac{k}{z^2} + \frac{g'(z)}{zg(z)}.$$

Vi vet att $\int_{|z|=1} dz/z^2 = 0$ (vilket följer från att parametrisera och räkna), och eftersom g är nollskild är g'/g holomorf så Cauchys formel ger att

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{zf(z)}\,dz &= \int_{|z|=1}\frac{k}{z^2}\,dz + \int_{|z|=1}\frac{g'(z)}{zg(z)}\,dz = 2\pi i g'(0)/g(0) \\ &= 2\pi i f^{(k+1)}(0)/((k+1)f^{(k)}(0)).\end{aligned}$$