

**Lösningar till tentamensskrivningen  
MAN500, Differentialgeometri, 20070315**

**1. Betrakta spiralkurvan**

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

där  $a$  och  $b$  är positiva konstanter. Bestäm båglängdsparametriseringen. Beräkna krökning och torsion för kurvan.

Eftersom

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-a \sin t, a \cos t, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

är  $s = \sqrt{a^2 + b^2}t$  båglängden. Vi beräknar

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \gamma'(s) &= \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \gamma''(s) &= \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).\end{aligned}$$

Då är  $\kappa(s) = \|\gamma''\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$ . Binormalen  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$  är

$$\mathbf{b}(s) = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

så  $\mathbf{b}'(s) = \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$  och  $\tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}$ .

**2. Visa den isoperimetriska olikheten för en enkel sluten reguljär i planet (Wirtingers lemmas får antas).**

Se stencil.

**3. Låt  $f: S_1 \rightarrow S_2$  vara en kontinuerlig avbildning från en reguljär yta  $S_1$  till en reguljär yta  $S_2$ . När sägs  $f$  vara differentierbar i punkten  $p \in S_1$ ? Visa att definitionen inte beror på val av lokala parametreringar.**

Avbildningen  $f$  sägs vara differentierbar i punkten  $p \in S_1$  om det finns parametreringar  $\sigma_1: U_1 \rightarrow S_1$  och  $\sigma_2: U_2 \rightarrow S_2$  med  $p \in \sigma_1(U_1)$  och  $f(\sigma_1(U_1)) \subset \sigma_2(U_2)$  så att sammansättningen  $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1: U_1 \rightarrow U_2$  är differentierbar i  $\sigma_1^{-1}(p) \in U_1$ .

Om nu  $\tilde{\sigma}_1: \tilde{U}_1 \rightarrow S_1$  och  $\tilde{\sigma}_2: \tilde{U}_2 \rightarrow S_2$  är andra parametreringar, så är koordinatbyten  $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2$  och  $\tilde{\sigma}_1^{-1} \circ \sigma_1$  diffeomorfier (på de öppna mängder där de är definierade) och  $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = (\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2) \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ (\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1)$  är differentierbar som sammansättning av differentierbara funktioner (av två variabler).

#### 4. Bestäm de asymptotiska linjerna på skruvytan

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av) .$$

Vi beräknar

$$\sigma_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\sigma_v = a(-u \sin v, u \cos v, a)$$

$$\sigma_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\sigma_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = a(-\cos v, -u \sin v, 0)$$

Detta ger att  $L = N = 0$  och därmed är differentialekvationen för asymptotiska linjer  $u'v' = 0$ , så koordinatlinjerna  $u = \text{konstant}$ ,  $v = \text{konstant}$  är de asymptotiska linjerna.

#### 5. Visa att Dinis yta

$$\sigma(u, v) = (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, bu + a(\cos v + \log \tan \frac{v}{2})) ,$$

där  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 < v < \pi$ , har konstant negativ Gaußkrökning. För vilka parametervärden är parametriseringen ej reguljär?

Vi beräknar

$$\sigma_u = (-a \sin u \sin v, a \cos u \sin v, b)$$

$$\sigma_v = a(\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v + 1/\sin v)$$

$$\sigma_{uu} = a(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, 0)$$

$$\sigma_{uv} = a(-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = a(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v - \cos v/\sin^2 v)$$

Detta ger  $E = a^2 \sin^2 v + b^2$ ,  $F = ab \cos^2 v / \sin v$ ,  $G = a^2 \cos^2 v / \sin^2 v$ ,  $EG - F^2 = a^2 \cos^2 v (a^2 + b^2)$ ,  $L = -a^2 \cos v \sin v / \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $M = ab \cos v / \sqrt{a^2 + b^2}$  och  $N = a^2 \cos v / \sin v \sqrt{a^2 + b^2}$ . Så  $K = LN - M^2 / EG - F^2 = -1/(a^2 + b^2)$ .

Parametriseringen är ej reguljär om  $0 = \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ , vad som händer om  $\cos v = 0$ ,  $v = \frac{1}{2}\pi$ .

#### 6. Beskriv geodeterna på en rotationsellipsoid, som uppstår om en ellips roteras om en av axlarna.

Se kursboken S 311.