Lösningar till tentamensskrivningen
MAN500, Differentialgeometri, 20070315

1. Betrakta spiralkurvan

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)\ ,$$

där a och b är positva konstanter. Bestäm båglängdsparametriseringen. Beräkna krökning och torsion för kurvan.

Eftersom

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \|(-a\sin t, a\cos t, b)\| = \sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

är $s = \sqrt{a^2+b^2}t$ båglängden. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}(s) &= (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})\ ,\\
\boldsymbol{\gamma}'(s) &= (-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})\ ,\\
\boldsymbol{\gamma}''(s) &= (-\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)\ .
\end{aligned}$$

Då är $\kappa(s) = \|\boldsymbol{\gamma}''\| = \frac{a}{a^2+b^2}$. Binormalen $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$ är

$$\boldsymbol{b}(s) = (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})\ ,$$

så $\boldsymbol{b}'(s) = (\frac{b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$ och $\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$.

2. Visa den isoperimetriska olikheten för en enkel sluten reguljär i planet (Wirtingers lemmas får antas).

Se stencil.

3. Låt $f\colon S_1 \to S_2$ vara en kontinuerlig avbildning från en reguljär yta S_1 till en reguljär yta S_2. När sägs f vara differentierbar i punkten $p \in S_1$? Visa att definitionen inte beror på val av lokala parametriseringar.

Avbildningen f sägs vara differentierbar i punkten $p \in S_1$ om det finns parametriseringar $\boldsymbol{\sigma}_1\colon U_1 \to S_1$ och $\boldsymbol{\sigma}_2\colon U_2 \to S_2$ med $p \in \boldsymbol{\sigma}_1(U_1)$ och $f(\boldsymbol{\sigma}_1(U_1)) \subset \boldsymbol{\sigma}_2(U_2)$ så att sammansättningen $\boldsymbol{\sigma}_2^{-1}\circ f\circ\boldsymbol{\sigma}_1\colon U_1 \to U_2$ är differentierbar i $\boldsymbol{\sigma}_1^{-1}(p) \in U_1$.
Om nu $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1\colon \tilde{U}_1 \to S_1$ och $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2\colon \tilde{U}_2 \to S_2$ är andra parametriseringar, så är koordinatbyten $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}_2$ och $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}_1$ diffeomorfier (på de öppna mängder där de är definierade) och $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{-1}\circ f\circ\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}_2)\circ\boldsymbol{\sigma}_2^{-1}\circ f\circ\boldsymbol{\sigma}_1\circ(\boldsymbol{\sigma}_1^{-1}\circ\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1)$ är differentierbar som sammansättning av differentierbara funktioner (av två variabler).

4. Bestäm de asymptotiska linjerna på skruvytan

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)\ .$$

Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_u &= (\cos v, \sin v, 0)\\
\boldsymbol{\sigma}_v &= (-u\sin v, u\cos v, a)\\
\boldsymbol{\sigma}_{uu} &= (0,0,0))\\
\boldsymbol{\sigma}_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0))\\
\boldsymbol{\sigma}_{vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0)
\end{aligned}$$

Detta ger att $L = N = 0$ och därmed är diffekvationen för asymptotiska linjer $u'v' = 0$, så koordinatlinjerna $u =$ konstant, $v =$ konstant är de asymptotiska linjerna.

5. Visa att Dinis yta

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (a\cos u\sin v, a\sin u\sin v, bu + a(\cos v + \log\tan\tfrac{v}{2}))\ ,$$

där $0 \le u \le 2\pi$, $0 < v < \pi$, har konstant negativ Gaußkrökning. För vilka parametervärden är parametriseringen ej reguljär?

Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_u &= (-a\sin u\sin v, a\cos u\sin v, b)\\
\boldsymbol{\sigma}_v &= a(\cos u\cos v, \sin u\cos v, -\sin v + 1/\sin v)\\
\boldsymbol{\sigma}_{uu} &= a(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, 0))\\
\boldsymbol{\sigma}_{uv} &= a(-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0))\\
\boldsymbol{\sigma}_{vv} &= a(-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, -\cos v - \cos v/\sin^2 v)
\end{aligned}$$

Detta ger $E = a^2\sin^2 v + b^2$, $F = ab\cos^2 v/\sin v$, $G = a^2\cos^2 v/\sin^2 v$, $EG - F^2 = a^2\cos^2 v(a^2+b^2)$, $L = -a^2\cos v\sin v/\sqrt{a^2+b^2}$, $M = ab\cos v/\sqrt{a^2+b^2}$ och $N = a^2\cos v/\sin v\sqrt{a^2+b^2}$. Så $K = LN - M^2/EG - F^2 = -1/(a^2+b^2)$.
Parametriseringen är ej reguljär om $0 = \|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, vad som händer om $\cos v = 0$, $v = \frac{1}{2}\pi$.

6. Beskriv geodeterna på en rotationsellipsoid, som uppstår om en ellips roteras om en av axlarna.

Se kursboken S 311.