Lösningar till tentamensskrivningen
MMG720, Differentialgeometri, 20110315

1. a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenet-Serrets ekvationer för en båglängdsparametriserad kurva i $\mathbb{R}^3$.
b) Beräkna κ, τ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ och $\boldsymbol{b}$ för kurvan $\boldsymbol{\gamma}(s) = (\frac{3}{5}\sin s, \frac{4}{5}\sin s, 2-\cos s)$.

a) Se kursboken.
b) Vi beräknar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}' &= (\frac{3}{5}\cos s, \frac{4}{5}\cos s, \sin s)\\ \boldsymbol{\gamma}'' &= (-\frac{3}{5}\sin s, -\frac{4}{5}\sin s, \cos s)\end{aligned}$$

Båda $\boldsymbol{\gamma}'$ och $\boldsymbol{\gamma}''$ är enhetsvektorer. Så $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\gamma}'$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\gamma}''$, $\kappa = 1$ och $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$, så $\boldsymbol{b}' = 0$, $\tau = 0$. Kurvan är en cirkel med radie 1 i planet $4x - 3y = 0$.

2. Visa att nivåytan

$$\mathcal{S} = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},$$

där f är en glatt funktion, är en glatt yta om gradienten $\nabla f(p) \neq 0$ i varje punkt $p \in \mathcal{S}$.

Låt $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$. Enligt förutsättning är $(f_x, f_y, f_z) \neq 0$. Vi får anta att $f_z \neq 0$. Enligt implicita funktionssatsen finns det en omgivning U av $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, en omgivning V av $z_0 \in \mathbb{R}$ och en differentierbar funktion $g\colon U \to V$ så att $f(x, y, g(x, y)) = 0$ för alla $(x, y) \in U$, och om $f(x, y, z) = 0$ för $(x, y, z) \in U \times V$, så är $z = g(x, y)$. Avbildningen $\boldsymbol{\sigma}\colon U \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, är nu en diffeomorfi från U till $(U \times V) \cap \mathcal{S}$, med $\boldsymbol{\sigma}_x \times \boldsymbol{\sigma}_y \neq 0$ på U. Därför är $\mathcal{S}$ en glatt yta.

3. Beräkna Gauß- och medelkrökningen
a) för skruvytan $\boldsymbol{\sigma}_1(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$,
b) för rotationsytan $\boldsymbol{\sigma}_2(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$.

a) Med $\boldsymbol{\sigma}_1(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ får vi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{1,u} &= (\cos v, \sin v, 0)\\ \boldsymbol{\sigma}_{1,v} &= (-u\sin v, u\cos v, 1)\\ \boldsymbol{\sigma}_{1,uu} &= (0, 0, 0)\\ \boldsymbol{\sigma}_{1,uv} &= (-\sin v, \cos v, 0)\\ \boldsymbol{\sigma}_{1,vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0)\end{aligned}$$

och $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$, $L = 0$, $M = -1/\sqrt{EG - F^2}$ och $N = 0$. Principalkrökningarna är lösningarna till

$$\begin{vmatrix} -\kappa & \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} & -\kappa(u^2+1) \end{vmatrix} = 0,$$

som ger $\kappa^2(u^2+1) - 1/(u^2+1) = 0$, så $\kappa_{1,2} = \pm 1/(u^2+1)$. Detta ger $K = -1/(1+u^2)^2$ och $H = 0$.

b) Med $\boldsymbol{\sigma}_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$ får vi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{2,u} &= (\cos v, \sin v, 1/u) \\
\boldsymbol{\sigma}_{2,v} &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\
\boldsymbol{\sigma}_{2,uu} &= (0, 0, -1/u^2) \\
\boldsymbol{\sigma}_{2,uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\
\boldsymbol{\sigma}_{2,vv} &= (-u\cos v, -u\sin v, 0)
\end{aligned}$$

och $E = (1+u^2)/(u^2)$, $F = 0$, $G = u^2$, $L = -1/u\sqrt{1+u^2}$, $M = 0$ och $N = u/\sqrt{1+u^2}$. Detta ger $\kappa_1 = -u/(1+u^2)^{3/2}$ och $\kappa_2 = 1/u\sqrt{1+u^2}$, så $K = -1/(1+u^2)^2$ och $H = 1/(2u(1+u^2)^{3/2})$.

4. Låt $\boldsymbol{\gamma}(s)$ vara en båglängdparametriserad kurva på en orienterad yta $\mathcal{S}$. Visa att den geodetiska krökningen κ_g ges av $\kappa_g = \det(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \mathrm{N})$, där N är enhetsnormalvektor på $\mathcal{S}$. Visa att formel för en allmän parameter t blir

$$\kappa_g = \frac{\det(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \mathrm{N})}{||\boldsymbol{\gamma}'||^3} \ .$$

Eftersom $\boldsymbol{\gamma}'' = \kappa_n \mathrm{N} + \kappa_g \mathrm{N} \times \boldsymbol{\gamma}'$ är $\kappa_g = \boldsymbol{\gamma}'' \cdot \mathrm{N} \times \boldsymbol{\gamma}' = \det(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \mathrm{N})$. För en allmän parameter t gäller $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$ och $\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2} = (\frac{ds}{dt})^2\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}$, och $||\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}|| = \pm\frac{ds}{dt}$, där minus-tecknet gäller om omparametriseringen byter orienteringen; då byter också κ_g tecknet. Insättning ger att

$$\frac{\det\left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2}, \mathrm{N}\right)}{||\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}||^3} = \pm\det\left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}, \frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{ds^2}, \mathrm{N}\right) \ .$$

5. Betrakta för alla $n \geq 2$ grafen Γ_n som parametriseras av $\boldsymbol{\sigma}_n(u,v) = (u, v, u^n - v^n)$. Bestäm för vilka $a \in \mathbb{R}$ spåret av kurvan $\boldsymbol{\gamma}_a(t) = \boldsymbol{\sigma}_n(t, at)$ är en geodet.

Kurvan $\boldsymbol{\gamma}_a$ är i allmänhet inte parametriserad med konstant hastighet, och därför inte geodet, men den kan vara omparametrisering av en geodet.
Nödvändigt och tillräckligt är att $\kappa_g = 0$ på kurvan, som kan beräknas med förmeln från uppgift 4. Vi har att $\mathrm{N} = (1, 0, nu^{n-1}) \times (0, 1, -nv^{n-1}) = (-nu^{n-1}, nv^{n-1}, 1)$. Från $\boldsymbol{\gamma}_a(t) = (t, at, (a^n-1)t^n)$ får vi $\boldsymbol{\gamma}'_a(t) = (1, a, n(a^n-1)t^{n-1})$ och $\boldsymbol{\gamma}''_a(t) = (0, 0, n(n-1)(a^n-1)t^{n-2})$; vidare är $\mathbf{N}(t) = (-nt^{n-1}, na^{n-1}t^{n-1}, 1)$. Villkoret $\kappa_g = 0$ ger $\det(\boldsymbol{\gamma}'_a, \boldsymbol{\gamma}''_a, \mathrm{N}) = 0$, som man beräknar till $-n^2(n-1)(a^n-1)t^{2n-3}(a^{n-1}+a) = 0$. Eftersom $n \geq 2$ är villkoret $a(a^n-1)(a^{n-2}+1) = 0$. Om $a^n - 1 = 0$, så är $\boldsymbol{\gamma}_a$ en rät linje i planet $z = 0$. Det händer för $a = 1$, och i fall n jämnt för $a = -1$. För udda n är $a = -1$ den enda reella lösningen till $a^{n-2} + 1 = 0$. Kurvan $\boldsymbol{\gamma}_{-1}$ är då normalsnitt med planet $x + y = 0$. Också $\boldsymbol{\gamma}_0$ är normalsnitt. Så svaret är $a = 0, 1, -1$ för alla $n \geq 2$.

6. Låt $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ vara en båglängdparametriserad kurva med normal $\boldsymbol{n}$ och binormal $\boldsymbol{b}$. Låt $r > 0$ vara ett (litet) tal sådant att rörytan $\mathcal{S}$ kring $\boldsymbol{\gamma}$, given av

$$\boldsymbol{\sigma}(s,\varphi) = \boldsymbol{\gamma}(s) - r\left(\cos\varphi\, \boldsymbol{n}(s) + \sin\varphi\, \boldsymbol{b}(s)\right) \ ,$$

är en reguljär yta i $\mathbb{R}^3$.

a) Visa att $\mathrm{N} = \cos\varphi\, \boldsymbol{n} + \sin\varphi\, \boldsymbol{b}$ är normalvektorfält till $\mathcal{S}$.

b) Beräkna principalkrökningarna.

c) Antag att γ är en enkel sluten kurva med längd l. Beräkna rörytans area $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{A}$ och integralen av Gaußkrökningen $\iint_{\mathcal{S}} K\, d\mathcal{A}$. (5p).

a) Vi beräknar $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\gamma}' - r\,(\cos\varphi\,\boldsymbol{n}'(s) + \sin\varphi\,\boldsymbol{b}'(s)) = (1+\kappa r\cos\varphi)\boldsymbol{\gamma}' + \tau r\sin\varphi\,\boldsymbol{n} - \tau r\cos\varphi\,\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{\sigma}_\varphi = r\sin\varphi\,\boldsymbol{n} - r\cos\varphi\,\boldsymbol{b}$. Så $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\gamma}' + \tau\boldsymbol{\sigma}_\varphi$ och $\boldsymbol{\sigma}_s \times \boldsymbol{\sigma}_\varphi = \boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\sigma}_\varphi = r\sin\varphi\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{n} - r\cos\varphi\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{b} = r(\cos\varphi\,\boldsymbol{n} + \sin\varphi\,\boldsymbol{b})$.
b) Vi uttrycker $\mathbf{N}_s$ och $\mathbf{N}_\varphi$ i $\boldsymbol{\sigma}_s$ och $\boldsymbol{\sigma}_\varphi$: $\mathbf{N}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{n} + \cos\varphi\,\boldsymbol{b} = -1/r\boldsymbol{\sigma}_\varphi$ och $\mathbf{N}_s = -\kappa\cos\varphi\boldsymbol{\gamma}' - \tau\sin\varphi\,\boldsymbol{n} + \tau\cos\varphi\,\boldsymbol{b} = -\kappa\cos\varphi/(1+\kappa r\cos\varphi)\boldsymbol{\sigma}_s + A\boldsymbol{\sigma}_\varphi$ med A en koefficient som vi inte beräknar. Basbytesmatrisen är minus matrisen till Weingartenavbildningen, vars egenvärden är principalkrökningarna. De är därför $1/r$ och $\kappa\cos\varphi/(1+\kappa r\cos\varphi)$.
c) Vi har $E = (1+\kappa r\cos\varphi)^2 + \tau^2 r^2$, $F = \tau r^2$ och $G = r^2$, so $\sqrt{EG - F^2} = r(1+\kappa r\cos\varphi)$. Så $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_0^l\int_0^{2\pi} r(1+\kappa r\cos\varphi)\,d\varphi\,ds = \int_0^l 2\pi r\,ds = 2\pi r l$. Vi har $K = \kappa_1\kappa_2 = \kappa\cos\varphi/r(1+\kappa r\cos\varphi)$ så $\int\int_{\mathcal{S}} K\,d\mathcal{A} = \int_0^l\int_0^{2\pi} \kappa\cos\varphi\,d\varphi\,ds = 0$. Det sista följer också ur Gauß-Bonnet, eftersom rörytan är homeomorfmed en torus.