MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 110312
Klockan: 8.30–12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefon: 0703 - 08 83 04
Martin Berglund

Tentamensskrivning i MMG720, Differentialgeometri

1. a) Härled, under lämplig förutsättning, Frenet-Serrets ekvationer för en båglängdsparametriserad kurva i $\mathbb{R}^3$.
b) Beräkna κ, τ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ och $\boldsymbol{b}$ för kurvan $\boldsymbol{\gamma}(s) = (\frac{3}{5}\sin s, \frac{4}{5}\sin s, 2 - \cos s)$.

2. Visa att nivåytan

$$\mathcal{S} = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\} ,$$

där f är en glatt funktion, är en glatt yta om gradienten $\nabla f(p) \neq 0$ i varje punkt $p \in \mathcal{S}$.

3. Beräkna Gauß- och medelkrökningen
a) för skruvytan $\boldsymbol{\sigma}_1(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$,
b) för rotationsytan $\boldsymbol{\sigma}_2(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$.

4. Låt $\boldsymbol{\gamma}(s)$ vara en båglängdparametriserad kurva på en orienterad yta $\mathcal{S}$. Visa att den geodetiska krökningen κ_g ges av $\kappa_g = \det(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{N})$, där $\mathbf{N}$ är enhetsnormalvektor på $\mathcal{S}$. Visa att formel för en allmän parameter t blir

$$\kappa_g = \frac{\det(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \mathbf{N})}{||\boldsymbol{\gamma}'||^3} .$$

5. Betrakta för alla $n \geq 2$ grafen Γ_n som parametriseras av $\boldsymbol{\sigma}_n(u, v) = (u, v, u^n - v^n)$. Bestäm för vilka $a \in \mathbb{R}$ spåret av kurvan $\boldsymbol{\gamma}_a(t) = \boldsymbol{\sigma}_n(t, at)$ är en geodet.

6. Låt $\boldsymbol{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^3$ vara en båglängdparametriserad kurva med normal $\boldsymbol{n}$ och binormal $\boldsymbol{b}$. Låt $r > 0$ vara ett (litet) tal sådant att rörytan $\mathcal{S}$ kring $\boldsymbol{\gamma}$, given av

$$\boldsymbol{\sigma}(s, \varphi) = \boldsymbol{\gamma}(s) - r(\cos\varphi\, \boldsymbol{n}(s) + \sin\varphi\, \boldsymbol{b}(s)) ,$$

är en reguljär yta i $\mathbb{R}^3$.
a) Visa att $\mathbf{N} = \cos\varphi\, \boldsymbol{n} + \sin\varphi\, \boldsymbol{b}$ är normalvektorfält till $\mathcal{S}$.
b) Beräkna principalkrökningarna.
c) Antag att $\boldsymbol{\gamma}$ är en enkel sluten kurva med längd l. Beräkna rörytans area $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{A}$ och integralen av Gaußkrökningen $\iint_{\mathcal{S}} K\, d\mathcal{A}$. (5p).

Varje uppgift (utom en) ger maximalt 4 poäng. För godkänd skrivning krävs minst 12 poäng. För väl godkänd krävs minst 18 poäng.
Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 25 mars.
Lycka till!

Jan Stevens