Tentamen
MMGD00, Introduktionskurs

2016-08-27 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, telefon: x5325

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För Godkänt på tentan krävs 20 poäng. Preliminärt så krävs 35 poäng för betyget Väl Godkänt. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 19 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifterna

1. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{3, 4, 5\}$.

(a) Skriv upp var och en av följande mängder (8p)

$$A \cap (C \backslash B), \quad (A \Delta B) \times C, \quad (A \times B) \cap (A \times C), \quad \mathcal{P}(A \cap B).$$

(b) Bestäm $|\mathcal{P}(C^3)|$ (du behöver inte skriva upp hela mängden). (2p)

2. (a) Låt $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ges av $f(x, y) = x^2 + y^2$. (5p)

i. Är f injektiv ? Förklara.

ii. Är f surjektiv ? Förklara.

(b) Betrakta samma funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ fast nu med definitionsmängd $\mathbb{R}^2$ och målmängd $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. (5p)

i. Är funktionen injektiv ? Förklara.

ii. Är funktionen surjektiv ? Förklara.

iii. Låt $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ges av $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$. Beskriv mängden A geometriskt.

Var god vänd!

3. (a) Skriv summan (3p)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{81}$$

med summasymbolen $\sum$.

(b) Beräkna summan (3p)

$$\sum_{t=-1}^{4} \frac{t}{t+2}.$$

(c) Givet att $\sum_{k=1}^{100} k = 5050$, beräkna summan (4p)

$$\sum_{m=1}^{100} \frac{m^2 + 3m + 2}{m+1}.$$

4. Låt f, $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ vara följande funktioner: (10p)

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

(a) Bevisa att både f och g är injektiva.

(b) Vilken/vilka av f och g är bijektiv ? Förklara.

(c) Skriv en formel för inversfunktionen till g (som en funktion med definitionsmängd $g([0, \infty))$).

(d) Skriv formler för funktionerna $g \circ f$ och $f \circ g$.

5. (a) I en klass med 100 datavetare så finns det 80 st som talar engelska, 70 st som talar tyska och 60 st som talar franska. Om varje datavetare talar minst ett av språken, bestäm det minsta (resp. största) möjliga antal datavetare som talar alla tre språk. Illustrera båda extremfallen i respektive Venndiagram. (5p)

(b) För var och ett av påståendena nedan, avgör om det är sant eller falskt. Om det är sant, motivera varför. Om det är falskt, ge ett motexempel. (5p)

i. Om f och g är två funktioner från en mängd S till sig själv sådana att $g \circ f$ är injektiv så måste även f vara injektiv.

ii. Om f och g är två funktioner från en mängd S till sig själv sådana att $g \circ f$ är injektiv så måste även g vara injektiv.

Lycka till!

//Edvin

Lösningar MMGD00, 160827

1. (a) i. $C \backslash B = \{5\}$ så $A \cap (C \backslash B) = \phi$.

ii. $A \Delta B = \{1, 4\}$ så

$$(A \Delta B) \times C = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}.$$

iii.

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\} \text{ och}$$
$$A \times C = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\} \text{ så}$$
$$(A \times B) \backslash (A \times C) = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}.$$

Notera förresten att $(A \times B) \backslash (A \times C) = A \times (B \backslash C)$.

iv. $A \cap B = \{2, 3\}$ så $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

(b) $|C^3| = |C|^3 = 3^3 = 27$ så $|\mathcal{P}(C^3)| = 2^{27}$.

2. (a) i. Nej för vi har t.ex. $f(0, 5) = 0^2 + 5^2 = 25 = 3^2 + 4^2 = f(3, 4)$.

ii. Nej för det finns t.ex. inga heltal x och y sådana att $x^2 + y^2 = 3$, så $3 \notin f(D)$.

(b) i. Nej. Funktionen var redan icke-injektiv i del (a) så den måste förbli det om vi utökar definitionsmängden.

ii. Ja ty för varje $r \in \mathbb{R}_+$ finns det par (x, y) av reella tal sådana att $x^2 + y^2 = r$. Lösningarna till denna ekvation utgör en cirkel i $\mathbb{R}^2$ med centrum i origo och radie $\sqrt{r}$.

iii. A är enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Summan är $\sum_{n=1}^{40} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

(b)

$$\sum_{t=-1}^{4} \frac{t}{t+2} = \frac{-1}{-1+2} + \frac{0}{0+2} + \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} + \frac{4}{4+2} = -1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{11}{10}.$$

(c) Konstatera att $m^2 + 3m + 2 = (m+1)(m+2)$ så summan förenklas till $\sum_{m=1}^{100}(m+2)$. Det är alltså summan av alla heltal från 3 till och med 102. Det är givet att summan av alla heltal från 1 till och med 100 är 5050. Så den första summan måste vara $5050 + 101 + 102 - 1 - 2 = 5250$.

4. (a) Angående f utnyttjar vi dess derivata. Man har $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Lösningarna till den kvadratiska ekvationen $3x^2 - 2x + 1 = 0$ är $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{1 \pm \sqrt{2}\, i}{3}$. Komplexa rötter innebär att $3x^2 - 2x + 1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Så f är en strängt växande funktion och därmed injektiv.

Angående g så är det uppenbart att $x + 1$ är strängt växande för $x \in [0, \infty)$ och därmed är $\frac{1}{x+1}$ strängt avtagande i intervallen. Så g är strängt avtagande och därmed injektiv. Vi kan också visa direkt med definitionen att g är injektiv genom att visa $g(x) = g(y) \implies x = y$. Bägge sätten är ok.

(b) f är också surjektiv ty $f(0) = 0$ och $f(x)$ växer sedan kontinuerligt och utan begränsning. Å andra sidan är $g(0) = 1$ och g avtar sedan och $g(x) \to 0$ då $x \to \infty$, så värdemängden för g är bara $(0, 1]$ och den är ej surjektiv.

Följdaktligen så är f bijektiv men inte g.

(c) Sätt $y = g(x) = \frac{1}{x+1}$. Inversfunktionen lyder har definitionsmängd $(0, 1]$, målmängd $\mathcal{R}$ och regel $x = \frac{1}{y+1}$ som kan skrivas om på följande vis:

$$x = \frac{1}{y+1} \Rightarrow x(y+1) = 1 \Rightarrow xy + x = 1 \Rightarrow y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1.$$

(d)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{x^3 - x^2 + x + 1}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 - [g(x)]^2 + g(x) = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{1 - (x+1) + (x+1)^2}{(x+1)^3} = \frac{1 - x - 1 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^3} = \frac{x^2+1}{(x+1)^3}.$$

5. (a) Låt A, B, C beteckna mängderna av datavetare som talar franska, tyska respektive engelska. Det är givet att

$$|A| = 60, \quad |B| = 70, \quad |C| = 80. \tag{1}$$

Det är också givet att varje datavetare talar minst ett av dessa språk, så

$$|A \cup B \cup C| = 100. \tag{2}$$

Enligt sållprincipen för tre mängder,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{3}$$

Insättning av (1) och (2) in i (3) ger

$$100 = 60 + 70 + 80 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

så

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 110. \tag{4}$$

Vi söker undre och övre gränser på $|A \cap B \cap C|$, dvs på storleken av mängden av datavetare som talar alla tre språk.

Övre gräns: Vi har såklart att var och en av $A \cap B$, $A \cap C$ och $B \cap C$ är minst lika stor som $A \cap B \cap C$. Detta innebär att VL av (4) är minst $2|A \cap B \cap C|$, så $|A \cap B \cap C| \leq 55$. Alltså högst 55 datavetare talar alla tre språk. Detta extremfall illustreras i den bifogade Figur 1(a).

Undre gräns: Betrakta mängden X av de datavetare som talar minst två av de tre språken. Vi har

$$|X| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C|, \tag{5}$$

där minus 2:an kommer från att elementen i $A \cap B \cap C$ räknas redan en gång i var och en av de tre första termerna i högerledet. Om vi jämför (4) med (5) så härleder vi att

$$|X| = 110 - |A \cap B \cap C|. \tag{6}$$

Men a priori så är $|X| \leq 100$ ty det finns bara 100 datavetare totalt. Alltså, $110 - |A \cap B \cap C| \leq 100$ som medför att $|A \cap B \cap C| \geq 10$. Så minst 10 datavetare talar alla tre språk. Detta extremfall illusteras i den bifogade Figur 1(b).

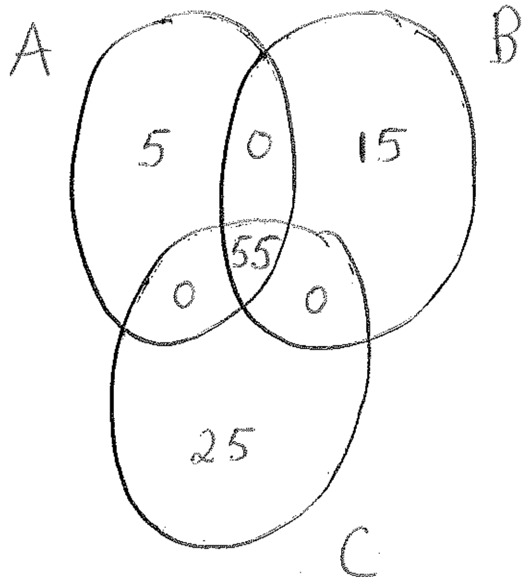
(b) i. Sant. För om f inte var injektiv skulle det innebära att det fanns $x_1 \neq x_2 \in X$ sådana att $f(x_1) = f(x_2)$. Men då skulle även

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

gälla, så $g \circ f$ skulle inte heller vara injektiv.

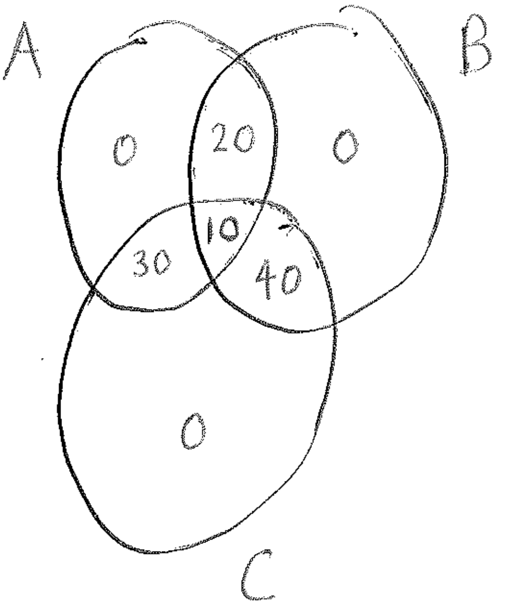
ii. Falskt. För att $g \circ f$ ska vara injektiv så räcker det att f är det samt att g är injektiv på delen $f(X)$ av dess definitionsmängd. Det spelar ingen roll hur g beter sig på delen $X \backslash f(X)$ av dess definitionsmängd.
Om X är en ändlig mängd och f är injektiv så måste $|f(X)| = |X|$ gälla, så $f(X) = X$ och i detta fall så måste även g vara injektiv. Men denna analys fallerar om X är oändlig. Som ett konkret motexempel, tag $X = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ och $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$. Det är klart att f är injektiv, men g är inte det ty t.ex. $g(0) = 0 = \lfloor 1/2 \rfloor = g(1)$. Men g är injektiv på de jämna talen och dessa utgör värdemängden $f(X)$. Precist så är $(g \circ f)(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}$, så $g \circ f$ är injektiv.

Figur 1 Extremfallen för de språkbegåvade teknologerna



(a)

Så många som möjligt talar alla tre språk



(b)

Så få som möjligt talar alla tre språk.