Tentamen
MMGD00, Introduktionskurs

2017-08-26 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Raad Salman(ordinarie), telefon: x5325 . Edvin Wedin: 073 - 66 35 700

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs preliminärt 20 poäng. Denna gräns kan komma att sänkas i efterhand, men ej höjas.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 15 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifter

1. Definiera följande mängder:

$$A = \{1, \text{fisk}, \{\emptyset\}, 0\},$$
$$B = \{A, \emptyset, \{0, 1\}, 1\}, \qquad \text{(Mängden } A \text{ är alltså ett element i mängden } B\text{)}$$
$$C = \mathcal{P}(\{0, 1\}).$$

Bestäm, genom att lista alla element, följande mängder. Ingen motivering krävs för denna uppgift. (9p)

(a) $A \cap B$

(b) $A \cap C$

(c) $B \cap C$

2. Visa eller motbevisa följande påståenden.

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (5p)

(b) $\left(A^C \cup B\right)^C \cap C = \left(A^C \cup B^C \cup C^C\right)$ (5p)

Använder du Venndiagram måste du visa hur diagrammen för höger- och vänsterled byggs upp av sina delar A, A^C, B etc.

Var god vänd!

3. (a) Definiera följande funktioner: (Vi använder konventionen $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$) (10p)

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{Z}_+ &\to \mathbb{Z}_+ \\ x &\mapsto x+3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x+3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \colon [0, \infty) &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 \colon \mathbb{R} &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^4, \end{aligned}$$

För var och en av funktionerna f_1, f_2, f_3 och f_4, avgör om funktionen är surjektiv, injektiv och/eller bijektiv. Motivera!

(b) Beskriv funktionen $f_3^{-1} \circ f_4$, inklusive dess värdemängd, målmängd och definitionsmängd, samt en formel för $f_3^{-1} \circ f_4(x)$ för ett godtyckligt x ur definitionsmängden.

4. (a) Beräkna

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{k-2}$$

där $A = \{-3, -2, -1, \dots, 6, 7\} \setminus \{2\}$. (4p)

(b) Lista elementen i följande mängd

$$\bigcap_{k=1}^{5} (A_k \cap \{1, 2, \dots, 100\})$$

där vi för varje k definierar $A_k = \{x \in \mathbb{Z}_+ : x \text{ är en jämnt delbart med } k\}$. (4p)

(c) Skriv följande summa med hjälp av summasymbolen Σ.

$$4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + \cdots + 81 + 100$$

(4p)

5. Vi definierar den binära operatorn $\star$ på $\mathbb{Z}$:

$$x \star y = x + x^2 y + y.$$

(a) Är operatorn $\star$ kommutativ? Motivera.

(b) Är operatorn $\star$ associativ? Motivera.

(c) Existerar det någon identitet? (9p)

Lycka till!

Lösningar till MMGD00, 2017-08-26

1. (a) De två uttrycken är lika, vilket lättast visas med Venndiagram. Se separat sida. Annars har vi, med reknereglerna från boken och papperen

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap \left(B \cap C^C\right) = A \cap B \cap C^C.$$

Men vi har också

$$\begin{aligned}(A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^C = A \cap B \cap \left(A^C \cup C^C\right) = B \cap A \cap \left(A^C \cup C^C\right) \\ &= B \cap \left((A \cap A^C) \cup (A \cap C^C)\right) = B \cap \left(A \cap C^C\right) = B \cap A \cap C^C = A \cap B \cap C^C,\end{aligned}$$

så de två uttrycken är lika.

(b) De två uttrycken är olika, vilket lättast visas med Venndiagram. Se separat sida. Annars ger den andra av deMorgans lagar direkt att

$$(A^C \cup B^C \cup C^C)^C = ((A^C \cup B^C) \cup C^C)^C = (A^C \cup B^C)^C \cap (C^C)^C = (A^C \cup B^C)^C \cap C \neq (A^C \cup B)^C \cap C$$

2. (a) $A \cap B = \{1\}$

(b) $A \cap C = \emptyset$

(c) $B \cap C = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$

3. (a) Funktionen f_1 är injektiv, ty $x + 3 = y + 3 \implies x = y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}_+$. Den är inte surjektiv då inget positivt tal plus 3 kan ge t.ex. talet 1. Därmed är f_1 inte bijektiv.

Funktionen f_2 är surjektiv, ty varje naturligt tal t kan fås genom att mata funktionen med $t - 3$. Funktionen f_2 är injektiv enligt samma argument som för f_1. Därmed är f_2 bijektiv.

Funktionen f_3 har en invers som ges av regeln $f_3^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$. Då den har en invers är den inverterbar, och är därmed bijektiv, vilket i sin tur ger att den är både injektiv och surjektiv.

Funktionen f_4 är inte injektiv, ty vi har t.ex. $f_4(-1) = f_4(1)$. Den är surjektiv då vi kan få ut varje tal t ur målmängden genom att mata funktionen med $\sqrt[4]{t}$. Då den inte är injektiv är den inte heller surjektiv.

(b) Vi har

$$f_3^{-1} \circ f_4(x) = f_3^{-1}(f_4(x)) = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt{\sqrt{(x^2)^2}} = \sqrt{|x^2|} = \sqrt{|x|^2} = |x|,$$

där vi använder likheterna $\sqrt{t^2} = |t|$ och $|t^2| = |t|^2$ som gäller för alla $t \in \mathbb{R}$. Då f_4 ligger till höger är definitionsmängden samma som för f_4, d.v.s. $\mathbb{R}$. Målmängden är samma som för f_3^{-1}, d.v.s. $[0, \infty)$. Då varje tal t i målmängden kan fås ut genom att mata funktionen med t är den surjektiv, och värdemängden är därmed samma som målmängden.

4. (a) Vi får att

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{k-2} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0,$$

där den sista likheten följer då termerna tar ut varandra.

(b) Den sökta mängden är $\{60\}$. Som vi har sett under föreläsningarna är snittet av två mängder A_k och A_l mängden av alla tal som är delbara med *både* k och l. Ett heltal är delbart med alla talen 1, 2, 3, 4 och 5 om och endast om det är delbart med 60, och då vi ur alla mängderna bara tar med talen upp till 100 är 60 det enda talet som är kvar.

(c) Summan kan skrivas som $\sum_{k=-2}^{10} k^2$.

5. (a) Operatorn är inte kommutativ. Notera t.ex. att

$$\begin{aligned} 1 \star -1 &= 1 - 1 - 1 = -1 \\ -1 \star 1 &= -1 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

(b) Operatorn är inte associativ. Notera t.ex. att

$$\begin{aligned} (1 \star -1) \star 1 &= -1 \star 1 = 1 \\ 1 \star (-1 \star 1) &= 1 \star -1 = -1. \end{aligned}$$

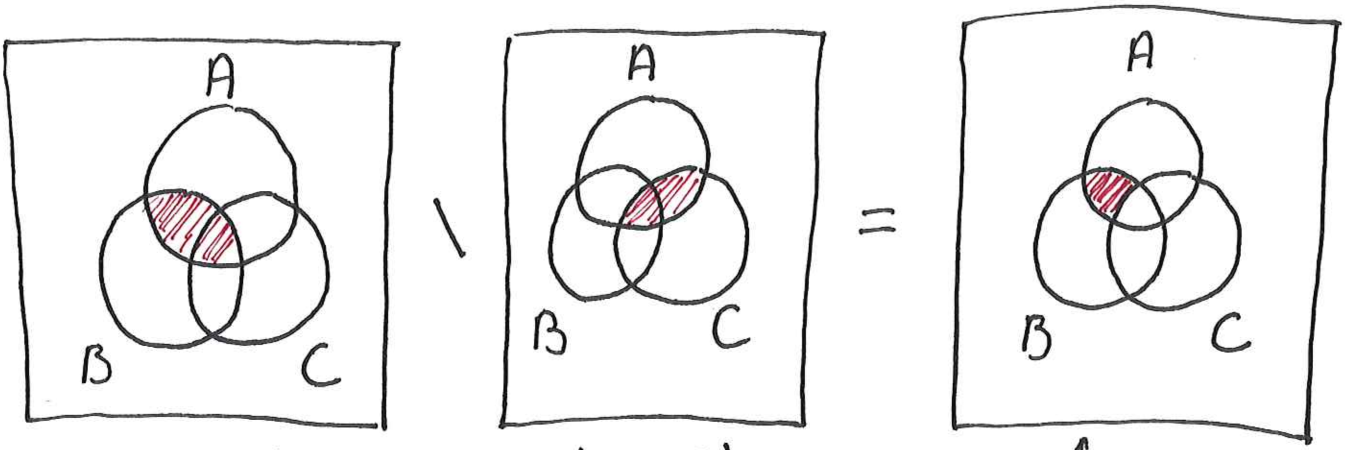
där vi använt uträkningen från (a)-delen.

(c) Elementet $0 \in \mathbb{Z}$ är neutralt, ty

$$a \star 0 = a + a^2 \cdot 0 + 0 = a = 0 + 0^2 \cdot a + a = 0 \star a$$

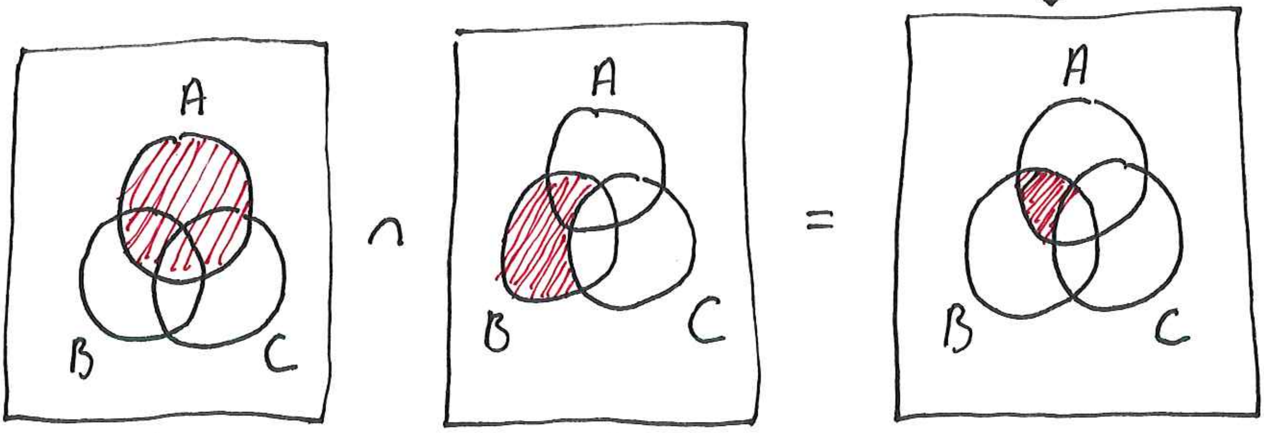
för varje $a \in \mathbb{Z}$.

(a)



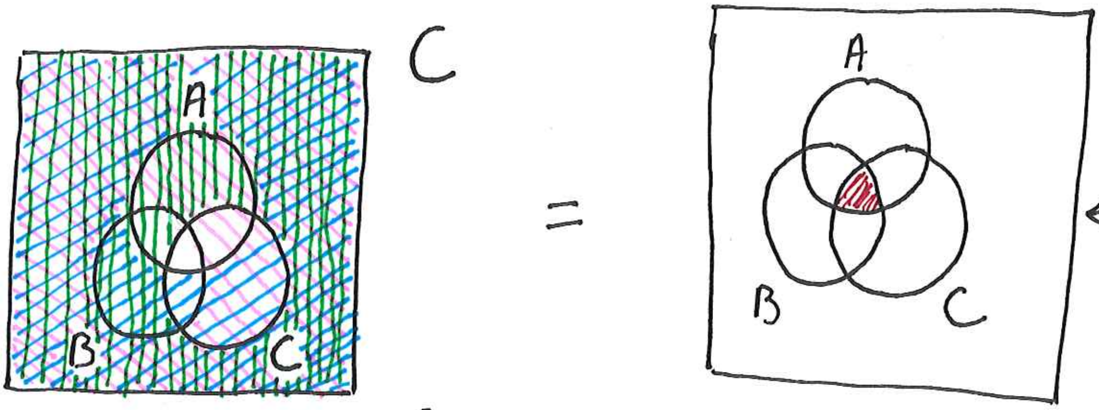
$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Lika



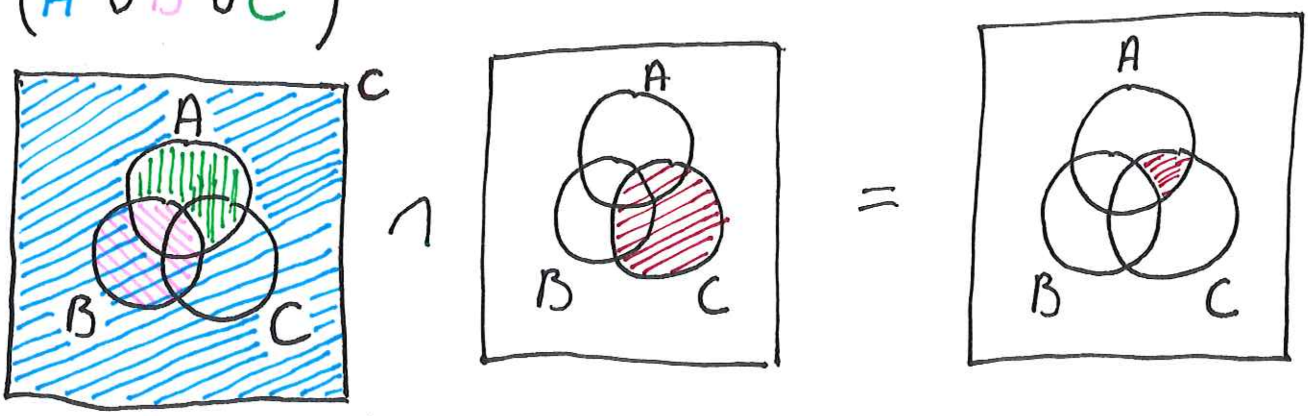
$A \cap (B \setminus C)$

(b)



$(A^c \cup B^c \cup C^c)^c$

← Ej Lika



$(A^c \cup B)^c \cap C$

$((A^c \cup B)^c)$