Tentamen
MMGD00, Introduktionskurs

2018-09-01 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Andreas Petersson(ordinarie), telefon: x5325 . Edvin Wedin: 073 - 66 35 700

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs preliminärt 20 poäng. Denna gräns kan komma att sänkas i efterhand, men ej höjas.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 15 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i hög grad beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte bara svaret.

Uppgifter

1. Definiera följande mängder:

$$A = \{1, \{2\}\} \qquad B = \{\{1\}, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3\}.$$

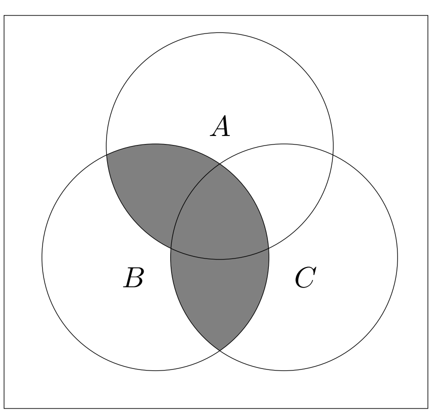
Skriv ut följande mängder med korrekt notation, så att man tydligt ser vilka element som ingår. Ingen motivering krävs för denna uppgift, men var noggrann.

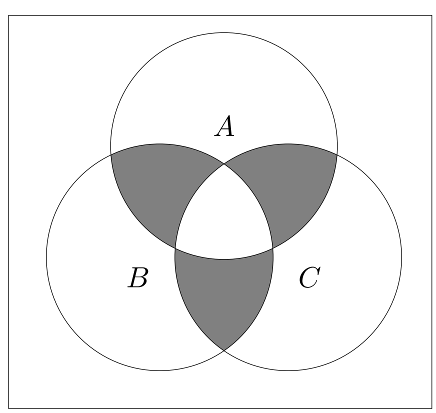
(a) $B \cap C$ (c) $A \cap B$

(b) $A \setminus C$ (d) $A \cap \mathcal{P}(B)$

där $\mathcal{P}(C)$ betecknar potensmängden av C, det vill säga mängden av alla delmängder. (8p)

2. Ge varsitt uttryck för följande mängder i termer av unioner, snitt, differenser och/eller komplement.

(a) 

(b) 

(5p)

Var god vänd!

3. Är det sant att

$$(B \cap C) \setminus A = \left(B^C \cup C^C \cup A\right)^C$$

för vilka mängder A, B och C som helst? Använd gärna Venndiagram om du vill, men motivera svaren väl! (5p)

4. (a) Definiera följande funktioner: (Vi använder beteckningen $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, och antar att 0 ingår som element i $\mathbb{N}$.)

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto 1 + x^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 \colon \mathbb{R}_{\geq 0} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a,\ b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

För var och en av funktionerna f_1, f_2 och f_3, avgör om funktionen är surjektiv, injektiv och/eller bijektiv, samt ange funktionens invers om den existerar. Motivera alla påståenden väl! (9p)

(b) Två av funktionerna i (a) delen går att sammansätta (med $\circ$-symbolen, "boll"), vilka? Skriv den sammansatta funktionen på samma form som i (a) delen med definitionsmängd och målmängd och regel för avbildning. (3p)

(c) Går det att ändra definitionsmängden och målmängden för funktionen f_1 från (a)-delen så att funktionen blir bijektiv? Om det går, vilken målmängd och definitionsmängd ska man välja? (Det finns flera möjliga svar som är rätt!) (3p)

5. (a) Beräkna

$$\sum_{k \in \{-1, 1, 2, 3, 6\}} \frac{1}{k}.$$

(3p)

(b) Skriv följande summa med hjälp av summasymbolen Σ.

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3$$

(2p)

(c) Lista elementen i följande mängd

$$\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 30\} \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{10} A_k \right)$$

där vi för varje k definierar $A_k = \{x : x \text{ är ett positivt heltal delbart med } k \text{ och } x \leq 30\}$. (4p)

6. Vi definierar den binära operatorn $\star$ på $\mathbb{Z}$ så att $a \star b = \max(a,\ b)$ för alla $x,\ y \in \mathbb{Z}$. Givet två tal får vi alltså ut det största.

(a) Är operatorn $\star$ kommutativ? Motivera.

(b) Är operatorn $\star$ associativ? Motivera.

(c) Existerar det någon identitet? (8p)

Lycka till!

Lösningar till MMGD00, 2017-08-26

1. (a) $B \cap C = \{2\}$

(b) $A \setminus C = \{\{2\}\}$

(c) $A \cap B = \emptyset$

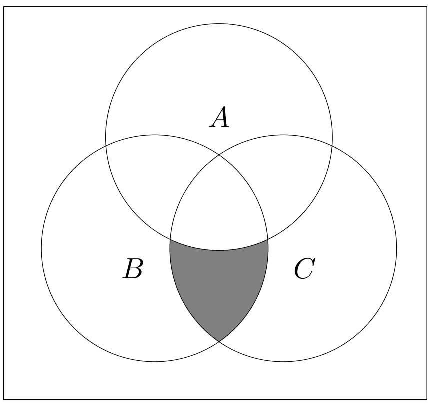
(d) $A \cap \mathcal{P}(B) = \{\{2\}\}$

2. Flera svar är möjliga. Exempel på svar är:

(a) $B \cap (A \cup C)$

(b) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

3. Det är sant. Bägge mängderna kan illustreras med följande Venndiagram:



Det finns flera sätt att komma fram till diagrammet ovan, men för åtminstone högerledet bör diagrammet byggas upp i flera steg.

4. (a) $x^2 \geq 0$ för alla element $x \in \mathbb{R}$, så vi kan aldrig få $f_1(x) < 1$. Till exempel kan vi inte få ut $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ur funktionen. f_1 är alltså inte surjektiv.
Vi kan få ut samma värde med olika argument, till exempel har vi $f_1(1) = f_1(-1)$, så f_1 är inte injektiv.
Då bijektivitet kräver både surjektivitet och injektivitet är f_1 inte bijektiv och har därför ingen invers.

Funktionen $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ är en invers till f_2, ty $g \circ f_2(y) = f_2 \circ g(y) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Då vi har en invers är f_2 bijektiv, och därmed även surjektiv och injektiv.

Vi kan få ut vilket element $t \in \mathbb{N}$ som helst ur f_3 genom att välja argumentet $(t, 0)$, så f_3 är surjektiv.
Vi kan få ut samma värde med olika argument, till exempel har vi $f_3(0, 1) = 1 = f_3(1, 0)$, så f_3 är inte injektiv.
Då bijektivitet kräver både surjektivitet och injektivitet är f_3 inte bijektiv och har därför ingen invers.

(b) De enda funktionerna som har kompatibla mål- och definitionsmängder är f_1 och f_2. $f_2(f_1(x)) = \sqrt{1 + x^2}$, så vi skriver

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1 \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{1 + x^2}\ . \end{aligned}$$

(c) Ett sätt är att sätta definitionsmängden till $\mathbb{R}_{\geq 0}$, och målmängden till $[1, \infty)$. Funktionen

$$\begin{aligned} g\colon [1, \infty) &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

blir då en invers till den nya funktionen. Om vi kallar den nya funktionen f_{1*} har vi att $f_{1*}(g(s)) = 1 + (\sqrt{s-1})^2 = 1 + s - 1 = s$ för alla $s \in [1, \infty)$ och $g(f_{1*}(t)) = \sqrt{(t^2+1)-1} = \sqrt{t^2} = t$ för alla $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, och vi ser att g verkligen är en invers. Då inversen finns är f_{1*} bijektiv, som efterfrågat.

5. (a) Skriver vi ut summan ser vi att

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Notera att de första två termerna tar ut varandra.

(b) Ordningen på termerna spelar ingen roll, så det sökta uttrycket är

$$\sum_{k=3}^{10} k$$

(c) Vi börjar med mängden $\{1, 2, ..., 30\}$ och tar bort alla tal som är delbara med något av talen 2, 3, ..., 10. Kvar blir då mängden som innehåller 1 samt alla primtal mellan 10 och 30, det vill säga mängden $\{1, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

6. Vi antar att $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ och att $a \geq b$.

(a) Samma tal är störst, oavsett vilken ordning de kommer, så $a \star b = b \star a = a$. Operatorn $\star$ är alltså kommutativ.

(b) Om vi jämför tre tal b, c och d kommer samma tal vara störst, oavsett vilka två vi jämför först, så operatorn $\star$ är alltså associativ.

(c) Antag att det existerar en identitet $e \in \mathbb{Z}$ sådan att $e \star b = b \star e = b$ för alla $b \in z$. Om det gäller för alla z måste vi kunna välja $z = e - 1$, men då får vi att $e \star z = e \star (e-1) = \max(e, e-1) = e \neq z$, vilket är en motsägelse. Antagandet att en identitet existerar för $\star$ måste därför vara falskt. Det finns alltså ingen identitet.