MMGF11, Kortfattade lösningar till tentamen 18/12 2009

1. (a) Maclaurin-utveckling ger

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x), \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_2(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 B_3(x)$$

där funktionerna $B_1,\ B_2,\ B_3$ är begränsade i en omgivning av 0. Härav följer

$$\frac{x - \sin x}{\arctan x - x\cos x} = \frac{\frac{x^3}{6} - x^5 B_1(x)}{(x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_2(x)) - (x - \frac{x^3}{2} + x^5 B_3 x)} =$$

$$\frac{\frac{x3}{6} - x^5 B_1(x)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^5(B_2(x) - B_3(x))} = \frac{\frac{1}{6} - x^2 B_1(x)}{\frac{1}{6} + x^2(B_2(x) - B_3(x))} \to 1, \text{ då } x \to 0.$$

(b) Vi har

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

så

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}$$

så ekvationssystemet $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ blir, med $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Systemets utvidgade matris är

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 5 & 13 & 23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

så minstakvadratlösningen ges av $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

(c) Integrerande faktor är e^{2x} så lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = e^{-2x}\left(5\int e^{2x} x\,dx + C\right) = e^{2x}(5\frac{e^{2x}}{2} + C) = \frac{5}{2} + Ce^{-2x},$$

där C är en konstant.

(d) Egenvärdena är lösningarna till den karaktäristiska ekvationen

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 35 = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna $\lambda_1 = 8$ och $\lambda_2 = -4$ så egenvärdena är 8 och -4.

2. (a) Sant. Låt λ vara ett egenvärde till A. Då är $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ med $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Eftersom $A^2 = A$ är

$$\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x},$$

dvs. $\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$, så $(\lambda - \lambda^2)\mathbf{x}$. Då $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ måste $\lambda(1-\lambda) = 0$, vilket medfär $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

(b) Falskt. Låt t.ex. $f_1(x) = \frac{x}{2}$ för $0 \leq x \leq 2$ och $f_2(x) = 2x$ för $0 \leq x \leq a$, där $0 < a < 1$. Arean A_1 av området som begränsas av kurvan $y = f_1(x)$, $x-$axeln och linjen $x = 1$ är 1 medan rotationsvolymen V_1, då detta område roterar ett varv kring $x-$axeln är $V_1 = \pi\int_0^2 [f_1(x)]^2\,dx = \frac{2\pi}{3}$. Arean A_2 av området som begränsas av kurvan $y = f_2(x)$, $x-$axeln och linjen $x = a$ är a^2 medan rotationsvolymen V_2, då detta område roterar ett varv kring $x-$axeln är $V_2 = \pi\int_0^2 [f_2(x)]^2\,dx = \frac{4\pi a^3}{3}$. Eftersom $0 < a < 1$ är $A_2 < A_1$ medan

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4\pi a^3}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = 2a^3 > 1$$

för $a > \frac{1}{2^{1/3}}$.

(c) Sant. Vi har $det((A - \lambda I)^T) = det(A - \lambda I)$ (Sats 3 i avsnitt 5.3 i Lay) och $(A - \lambda I)^T = A^T - (\lambda I)^T = A^T - \lambda I$ (följer direkt av definitionen av transponat) så $det(A^T - \lambda I) = det(A - \lambda I)$, vilket visar att A^T och A har samma egenvärden.

(d) Sant. För $0 \leq x \leq 2$ är $1 = \sqrt{1} \leq \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{1+2^3} = \sqrt{9} = 3$ så

$$2 = (2-0) \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 3(2-0) = 6.$$

(e) Falskt. Låt t.ex. U vara $x-$axeln och V vara $y-$axeln i $\mathbb{R}^3$. Då är U och V två ortogonala underrum av $\mathbb{R}^3$. Ortogonala komplementet $U^\perp$ av U är $yz-$planet och ortogonala komplementet $V^\perp$ av V är $xz-$planet. Eftersom alla punkter utom origo på $z-$axeln ligger i både $U^\perp$ och $V^\perp$ och är nollskilda, kan $U^\perp$ och $V^\perp$ inte vara ortogonala.

(f) Falskt. Låt t.ex. f vara funktionen som är 0 utom på intervallen $[k - \frac{1}{2k^2}, k + \frac{1}{2k^2}]$ kring de positiva heltalen k, växer linjärt från 0 till 1 över intervallet $[k - \frac{1}{2k^2}, k]$ och avtar linjärt från 1 till 0 över intervallet $[k, k + \frac{1}{2k^2}]$. Då är för varje positivt heltal n

$$\int_1^{n+\frac{1}{2n^2}} f(x)\,dx$$

=arean mellan funktionskurvan $y = f(x)$ och $x-$ axeln för $0 \leq x \leq n + \dfrac{1}{n^2}$ =

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g(k),$$

där $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Då

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

är konvergent, är serien konvergent och därmed även $\int_1^\infty f(x)\,dx$. Men funktionen f saknar naturligtvis gränsvärde, då $x \to \infty$.

3. Den sökta volymen är

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x})^2 \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \pi[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

4. En vektor $\mathbf{x}$ ligger i det ortogonala komplementet till $Span\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ precis då $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}_2$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}_3$. Med

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ och } \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

är detta ekvivalent med att ekvationerna

$$2x_1 + 3x_4 = 0, \quad 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0, \quad x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_2 = 0$$

är uppfyllda. Genom att lösa detta system av ekvationer finner vi, med x_4 fri att

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_4, \quad x_2 = -3x_4, \quad x_3 = \frac{9}{2}x_4.$$

Detta ger

$$\mathbf{x} = \frac{x_4}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

så en bas ges t.ex. av

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. Det är klart att funktionen som är konstant 0 är en lösning till differentialekvationen, men uppfyller inte begynnelsevärdet. Vi söker en lösning y på ett intervall kring 0, som inte är 0. För sådana y är ekvationen ekvivalent med

$$\frac{y'}{y^2} = -3x^2.$$

Detta är en separabel ekvation. Genom att bestämma primitiva funktioner till båda led finner vi

$$-\frac{1}{y(x)} = -3\frac{x^3}{3} + C = -x^3 + C \text{ så } y(x) = \frac{1}{x^3 - C}.$$

Då $y(0) = 1$ blir $C = -1$ och den sökta lösningen $y(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

6. Genom utveckling längs första raden finner vi

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4] = (1-\lambda)(1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda),$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -1$. Egenvektor som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 1$ får vi ur ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ vilket ger } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi väljer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer som svarar mot de andra egenvärdena bestäms på samma sätt, vilket ger

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

blir $P^{-1}AP = D$.

7. Vi har med

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ så vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bildar en ortogonalbas för $V = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.Den punkt i V som ligger närmast $\mathbf{v}$ är projektionen av $\mathbf{v}$ på V, och då $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bildar en ortogonalbas för V ges den av

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 = \frac{20}{10}\mathbf{v}_1 + \frac{76}{76}\mathbf{v}_2 - \frac{12}{4}\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3,$$

vilket ger

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ och } \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

samt $||\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + (-2)^2 + 11^2} = \sqrt{1 + 64 + 4 + 121} = \sqrt{190}$.

8. Vi bestämmer först den allmänna lösningen till den homogena ekvatiionen $y'' - 7y' + 10y = 0$. Karaktäristiska ekvationen är $r^2 - 7r + 10 = 0$ med lösningarna $r_1 = 5$ och $r_2 = 2$. Den allmänna lösningen y_h till den homogena ekvationen är därför $y_h(x) = Ae^{5x} + Be^{2x}$, där A, B är godtyckligt valda konstanter.Vi söker nu en partikulärlösning

till den inhomogena ekvationenoch gör ansättningen $y_p(x) = a\sin x + b\cos x$ vilket medför $y_p'(x) = a\cos x - b\sin x$ och $y_p''(x) = -a\sin x - b\cos x$. Insättning i ekvationen ger

$$-a\sin x - b\cos x - 7(a\cos x - b\sin x) + 10(a\sin x + b\cos x) = \sin x.$$

Efter förenkling blir detta

$$(9a + 7b)\sin x + (9b - 7a)\cos x = \sin x,$$

som ger ekvationerna $9a+7b = 1, 9b-7a = 0$,med lösning $a = \frac{9}{130}$ och $b = \frac{7}{130}$. Allmänna lösningen till den givna ekvatiionen är därför

$$y(x) = Ae^{5x} + Be^{2x} + \frac{1}{130}(9\sin x + 7\cos x).$$