Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: Richard Lärking
tel 0703-088304

Tentamen MMGF11

Lördag 28 augusti 2009, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x^2)+3\arctan x - 3x}{x^5}.$$

   (b) Finn egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Lös differentialekvationen $xy' - 2y = x^2, \quad x > 0$.

   (d) Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där
   $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om matrisern A och B är symmetriska så är AB symmetrisk om och endast om $AB = BA$.

   (b)
   $$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,dx > \sqrt{\pi}$$

   (c) Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (d) Funktionen f, definierad för $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ genom
   $$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
   har sitt största värde för $x = \pi$.

(e) Om $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ är en reell kvadratisk form på $\mathbb{R}^3$ och λ_{min} och λ_{max} är det minsta resp. största egenvärdet för A så är

$$\lambda_{min}||\mathbf{x}||^2 \leq Q(\mathbf{x}) \leq \lambda_{max}||\mathbf{x}||^2.$$

(f) Lösningen till begynnelsevärdeproblemet $y' = y^2, \quad y(0) = 1$ är en begränsad deriverbar funktion definierad för alla $x \geq 0$.

3. Bestäm arean av det ändliga område i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x^{3/2}$ och $y = 2x$.

4. Bestäm en ON-bas för det underrum V av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. Lös differentialekvationen $xy' + (x+1)y = e^{-x}, \ \ x > 0$.

6. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -1$.

7. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = e^x$.

8. En matris A har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ med egenvärde -1 och egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

båda med egenvärde 1. Bestäm matrisen A

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$1\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$