Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: Adam Andersson
tel 070-3088304

Tentamen MMGF11

Fredag 18 december 2009, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{\arctan x - x\cos x}.$$

   (b) Finn minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

   (c) Lös differentialekvationen $y' + 2y = 5$.

   (d) Finn egenvärdena till matrisen
   $$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Enda egenvärdena till en matris A sådan att $A \cdot A = A$ är 0 eller 1.

   (b) Av två rotationsvolymer har den störst volym som man får genom att rotera det område i planet, vars area är störst.

   (c) Matriserna A och A^T har samma egenvärden.

   (d) $2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx \leq 6$.

   (e) Om underrummen U och V av $\mathbb{R}^n$ är ortogonala, så är även deras ortogonala komplement $U^\perp$ och $V^\perp$ ortogonala.

   (f) Om f är kontinuerlig för $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ och den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)\, dx$ är konvergent så måste $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då ytan mellan kurvan $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$ roterar runt x-axeln.

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för det ortogonala komplementet till $Span\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

5. Finn den lösning till differentialekvationen

$$y' + 3x^2y^2 = 0$$

för vilken $y(0) = 1$.

6. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm punkten $\tilde{\mathbf{v}} \in V = Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$. Ange också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och V.

8. Lös differentialekvationen

$$y'' - 7y' + 10y = \sin x.$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$