Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: ....
tel 0703 - 088304

Tentamen MMGF11, del 2

Torsdag 8 april 2010, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - \cos x + \ln(1-2x)}{x \arctan x}.$$

   (b) Finn egenvärdena till matrrisen
   $$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (c) Lös differentialekvationen $y' + \frac{y}{x} = 2, \quad x > 0.$

   (d) Finn minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Det finns en $2 \times 2-$matris som har varje vektor i $\mathbb{R}^2$, bortsett från nollvektorn, som egenvektor.

   (b) Om $|x| < 10^{-2}$ så är $|\arctan x - x| < \frac{10^{-6}}{3}$.

   (c) Om A är en $3 \times 3-$matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ sådana att $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 5\mathbf{a}_3$, så har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ enbart $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som lösning.

   (d) Antag att funktionen f definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ uppfyller

      i. $f(x+y) = f(x)f(y)$ för alla rella x och y

      ii. $f(0) = 1$

      iii. $lim_{x->0} \frac{f(x)-1}{x} = 5$.

      Då är $f(x) = e^{5x}$ för alla reella x.

   (e) Låt A vara en symmetrisk matris. Då finns det ett $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som tillhör både $NulA$ och $ColA$.

(f) Den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{x^3 \arctan x}\, dx$$

är divergent.

3. Bestäm arean av det ändliga område i $xy-$planet som begränsas av kurvorna $y = x^{3/2}$ och $y = 4x$.

4. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm med användning av Gram-Schmidts process en ortogonalbas för $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

5. Finn den lösning till differentialekvationen

$$(1 + x^2)y' + 2xy = \cos x$$

för vilken $y(0) = 1$.

6. En matris A har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenvärde 1 och egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, båda med egenvärde -1. Bestäm A.

7. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = 2$.

8. Lös differentialekvationen

$$y'' - 3y' = \cos 2x.$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$