MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i ANALYS OCH LINJÄR ALGEBRA, MMGF11
Onsdag 19 december 2012, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten.
Lärare: David Witt Nyström, 031-7725365.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger fyra poäng.

---

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
   $$\lim_{x\to 0} \frac{6x - 3\arctan 2x}{x - x\cos x}.$$

   (b) Finn egenvärdena till matrisen
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

   (c) Lös differentialekvationen $y' = (1+y^2)x$.

   (d) Finn minstakvadratlösningen till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger $0,5$ poäng, fel svar $-0,5$ poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a)
   $$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \ln x dx = -\infty.$$

   (b) Det finns en matris 2×2-matris A med egenvärde -1 sådan att $A^3 = I$.

   (c) Givet en kontinuerlig funktion $f(x)$ på det slutna intervallet $[0,1]$ så finns det minst en funktion $F(x)$ på det öppna intervallet $(0,1)$ sådan att $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in (0,1)$.

   (d) Låt A vara en kvadratisk matris. Om u och v är vektorer sådana att u, v och $u+v$ alla är egenvektorer till A så har egenvektorerna u och v samma egenvärde.

(e) Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 11 \\ 3 & 7 & 13 & 17 \\ 5 & 13 & 19 & 23 \\ 11 & 17 & 23 & 29 \end{bmatrix}$$

är diagonaliserbar.

(f) Den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$$

är divergent.

3. Bestäm arean av det ändliga området i den första kvadranten av xy-planet som begränsas av y-axeln samt kurvorna $y = \tan x$ och $y = \sqrt{2} cos x$.

4. Låt

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm avståndet mellan $\mathbf{v}$ och det ortogonala komplementet till $\text{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$.

5. Finn den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{2x}{3 + x^2} y = 1 + x$$

för vilken $y(0) = 2$.

6. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 6x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = -1$ och $x_2(0) = 1$.

7. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = 10 + \sin 2x.$$

8. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -50 \\ 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm A^{100}.

LYCKA TILL!

Några Taylorutvecklingar kring $x = 0$ (Maclaurinutvecklingar).

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1+\theta x}$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \frac{1}{1+(\theta x)^2}$