MMGF11, kortfattade lösningar till tentamen 19/12 2012

1. (a) Lösning: Taylorutveckling av de inblandande funktionerna ger att

$$\frac{6x - 3\arctan 2x}{x - x\cos x} = \frac{6x - 3((2x) - (2x)^3/3 + O(x^4))}{x - x(1 - x^2/2 + O(x^3))} =$$
$$= \frac{x^3(8 + O(x))}{x^3(1/2 + O(x))} = \frac{8 + O(x)}{1/2 + O(x)}.$$

Detta ger att

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x - 3\arctan 2x}{x - x\cos x} = 16.$$

(b) Lösning: Det karaktäristiska polynomet blir

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-4-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10$$

vilket har nollställena -5 och 2. Enligt sats är därför egenvärdena -5 och 2.

(c) Lösning: Ekvationen skrivs på separabel form

$$\frac{1}{1+y^2} y' = x,$$

och vi får därför den implicita lösningen

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int x dx,$$

dvs

$$\arctan y = x^2/2 + C.$$

För att få en explicit lösning tar vi tangens på båda sidor och får

$$y = \tan(x^2/2 + C).$$

(d) Lösning: Enligt sats erhålls minstakvadratlösningen genom att lösa den normala ekvationen $A^T Ax = A^T b$. Vi får att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad A^T b = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Genom radreduktion av

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

får vi att minstakvadratlösningen är

$$x = \frac{1}{62} \begin{bmatrix} -55 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Lösning: Enligt sats är

$$\int_{\epsilon}^{2\epsilon} \ln x dx = (2\epsilon - \epsilon) \ln \zeta = \epsilon \ln \zeta$$

för något tal $\zeta \in [\epsilon, 2\epsilon]$. Detta betyder att

$$\epsilon \ln \epsilon \leq \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \ln x dx \leq \epsilon \ln 2\epsilon = \epsilon \ln \epsilon + \epsilon \ln 2.$$

Då vi har standardgränsvärdet

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \epsilon \ln \epsilon = 0$$

följer det att

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \ln x dx = 0$$

och därför är påståendet falskt.

(b) Lösning: Antag att x var en egenvektor med egenvärde -1. Vi får då att

$$x = Ix = A^3 x = (-1)^3 x = -x,$$

dvs $x = 0$, vilket är en motsägelse då x antogs vara en egenvektor. Detta visar att påståendet är falskt.

(c) Lösning: Enligt Analysens huvudsats är funktionen

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

en sådan funktion, så påståendet är sant.

(d) Lösning: Låt λ_1 beteckna $u : s$ egenvärde och medan λ_2 får beteckna $v : s$ egenvärde och så låter vi λ_3 beteckna $(u + v) : s$ egenvärde. Vi har då att $\lambda_1 u + \lambda_2 v = A(u + v) = \lambda_3 u + \lambda_3 v$. Om u och v är linjärt oberoende följer det därför att $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, medan om u och v vore linjärt beroende så följer det direkt att $\lambda_1 = \lambda_2$. Påståendet är därför sant.

(e) Lösning: Matrisen A är symmetrisk, dvs $A^T = A$, så därför är enligt sats A till och med ortogonalt diagonaliserbar. Påståendet är därför sant.

(f) Lösning: Vi har att

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

då $x > 0$, samtidigt som den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

är konvergent. Enligt sats är därför även

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$$

konvergent, dvs påståendet är falskt.

3. Lösning: Vi noterar att kurvan $y = \sqrt{2}\cos x$ initialt ligger ovanför kurvan $y = \tan x$. Om x_1 betecknar x-koordinaten hos punkten där kurvorna skär varandra så har vi att den eftersökta arean ges av integralen

$$\int_0^{x_1} \sqrt{2}\cos x - \tan x dx.$$

Ekvationen

$$\sqrt{2} cosx = \tan x$$

ger oss att $x_1 = \pi/4$. Via insättningsformeln får vi att arean är

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\cos x - \tan x dx = \left[\sqrt{2}\sin x + \ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\sin\pi/4 + \ln\cos\pi/4 = 1 - \ln\sqrt{2}.$$

4. Lösning: Låt W beteckna $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}^{\perp}$, och därför $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\} = W^{\perp}$. Om $\mathrm{proj}_W v$ betecknar den ortogonala projektionen av v på W så är avståndet mellan v och W per definition längden av vektorn $v - \mathrm{proj}_W v$. Då $v - \mathrm{proj}_W v$ ligger i $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\} = W^{\perp}$ och $v - (v - \mathrm{proj}_W v)$ ligger i $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}^{\perp}$ följer att $v - \mathrm{proj}_W v = \mathrm{proj}_{W^{\perp}} v$. Vi väljer här att direkt projicera v på $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$. Via Gram-Schmidts process (med skalning) hittar vi en ortogonalbas för $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$, $v_1 = u_1$ och $v_2 = 2(u_2 - u_2 \cdot v_1/||v_1||^2 v_1)$, så

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi får att projektionen av v på $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ blir

$$\frac{v \cdot v_1}{||v_1||^2} v_1 + \frac{v \cdot v_2}{||v_2||^2} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{27} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{27} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 16 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Avståndet till det ortogonala komplementet till $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ är nu längden av denna vektor, dvs

$$\frac{2}{27}\sqrt{11^2 + 10^2 + 16^2 + 15^2} = \frac{2}{27}\sqrt{702} \approx 1.963.$$

5. Lösning: Detta är en linjär differentialekvation av första graden. En primitiv till $g(x) = 2x/(3 + x^2)$ ges av $\ln(3 + x^2)$, så den integrerande faktorn blir $3 + x^2$. Den allmänna lösningen ges enligt sats av

$$y = \frac{1}{3 + x^2} \int (1 + x)(3 + x^2) dx = \frac{1}{3 + x^2}(3x + 3x^2/2 + x^3/3 + x^4/4) + \frac{C}{3 + x^2}.$$

Begynnelsevärdesvillkoret $y(0) = 2$ ger att $C = 6$, så lösningen ges av

$$y = \frac{6 + 3x + 3x^2/2 + x^3/3 + x^4/4}{3 + x^2}.$$

6. Lösning: Vi skriver systemet som

$$x'(t) = Ax(t)$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Från uppgift 1b har vi att $A : s$ egenvärden är -5 och 2. Genom radreduktion av $A+5I$ får vi t ex att

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

är en egenvektor med egenvärde -5, medan vi på liknande sätt får att

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en egenvektor med egenvärde 2. Enligt sats är då den allmänna lösningen till differentialekvationen given av

$$x(t) = C_1e^{-5t}v_1 + C_2e^{2t}v_2 = \begin{bmatrix} C_1e^{-5t} + C_2e^{2t} \\ -6C_1e^{-5t} + C_2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Insättning $t = 0$ ger att $C_1+C_2 = -1$ och $-6C_1+C_2 = 1$, vilket leder till att $C_1 = -2/7$ medan $C_2 = -5/7$. Därför blir lösningen

$$x_1(t) = -(2/7)e^{-5t} - (5/7)e^{2t}, \qquad x_2(t) = (12/7)e^{-5t} - (5/7)e^{2t}.$$

7. Lösning: Vi börjar med att hitta alla lösningar till den homogena ekvationen

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

Det karaktäristiska polynomet blir $r^2 - 3r - 10$, vilket har nollställena -2 och 5. Enligt sats är därför den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{5x}.$$

Nu letar vi efter en partikulärlösning. Låt $\mathcal{L}$ beteckna vår linjära differentialoperator, dvs $\mathcal{L}(y) = y'' - 3y' - 10y$. Först noterar vi att functionen -1 löser ekvationen

$$\mathcal{L}(y) = 10.$$

Vi letar nu efter en partikulärlösning till ekvationen $\mathcal{L}(y) = \sin 2x$. Vår ansats är

$$y = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Vi börjar med att beräkna

$$\mathcal{L}(\sin 2x) = -4\sin 2x - 6\cos 2x - 10\sin 2x = -14\sin 2x - 6\cos 2x.$$

Sedan

$$\mathcal{L}(\cos 2x) = -4\cos 2x + 6\sin 2x - 10\cos 2x = 6\sin 2x - 14\cos 2x.$$

Via linearitet hos $\mathcal{L}$ får vi att

$$\mathcal{L}(A \sin 2x + B \cos 2x) = (-14A + 6B) \sin 2x + (-6A - 14B) \cos 2x,$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$-14A + 6B = 1, -6A - 14B = 0.$$

Detta har lösningen $A = -7/116$ och $B = 3/116$, så en partikulärlösning ges av

$$y = -(7/116) \sin 2x + (3/116) \cos 2x.$$

Tack vare lineariteten är nu

$$y = -1 - (7/116) \sin 2x + (3/116) \cos 2x$$

en partikulärlösning till vår ursprugliga ekvation $\mathcal{L}(y) = 10 + \sin 2x$. Enligt sats är därför den allmänna lösningen till ekvationen denna adderat med den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, dvs

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x} - 1 - (7/116) \sin 2x + (3/116) \cos 2x.$$

8. Lösning: Enligt sats ges egenvärdena till en triangulär matris av värdena på diagonalen, dvs i det här fallet -1 och 1. Då

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -50 \\ 0 & -2 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

har rang 1 ser vi att egenrummet hörande till egenvärdet 1 är tvådimensionellt. Detta betyder att A är diagonaliserbar, dvs på formen PDP^{-1}, där P är inverterbar och D är diagonal. Då egenvärdena är -1 och 1 är kan vi välja D som

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

och vilket betyder att $D^2 = I$. Vi har nu att

$$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = D^{100} = (D^2)^{50} = I^{50} = I,$$

alltså är A^{100} lika med identitetsmatrisen. Alternativt noterar vi att $A^2 = I$, och sluter oss till samma sak.