MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i ANALYS OCH LINJÄR ALGEBRA, MMGF11
Tisdag 2 april 2013, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten.
Lärare: David Witt Nyström, 031-7725365.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger fyra poäng.

---

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Bestäm
$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{3/x} - (1+2/x)^{3/2}).$$

   (b) Finn egenvärdena till matrisen
$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (c) Hitta en deriverbar funktion $f(x)$ definierad på intervallet $x \in (1, \infty)$ sådan att
$$f'(x) = e^{-f(x)} \ln x$$
   och $f(e) = 1$.

   (d) Finn minstakvadratlösningen till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger $0,5$ poäng, fel svar $-0,5$ poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Givet en vektor $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ i $\mathbb{R}^n$ kan man alltid hitta en $n \times n$-matris A vars karaktäristiska polynom är precis
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

   (b) Den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x^2$ är positivt definit, dvs $Q(x_1, x_2) > 0$ närhelst x_1 eller x_2 är skild från noll.

   (c) Låt f vara en kontinuerlig positiv funktion på intervallet $(0, 1)$ och anta att den generaliserade integralen
$$\int_0^1 f(x)dx$$

är divergent. Då följer det att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

är konvergent.

(d) Låt A vara en kvadratisk 2×2 matris. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer sådana att $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ så är $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$.

(e) Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k^2}$$

är konvergent.

(f) Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, 1]$. Om vi har att

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

närhelst $0 < a < b < 1$, då är f konstant.

3. Bestäm integralen

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x+2}{x^2+4} dx.$$

4. Låt

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathrm{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

5. Finn den lösning till differentialekvationen

$$y' + xe^x y = xe^x$$

för vilken $y(0) = 1 + e$.

6. Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 5x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= 1x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases}$$

där $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 2$.

7. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 3y' = x + \sin x.$$

8. Låt a_k och b_k vara två följder av reella tal sådana att för alla $k \geq 0$ så är

$$a_{k+1} = 5a_k + b_k,$$

och

$$b_{k+1} = a_k + 5b_k.$$

Antag också att

$$|a_0| > |b_0|.$$

Bestäm

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}.$$

LYCKA TILL!

Några Taylorutvecklingar kring $x = 0$ (Maclaurinutvecklingar).

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1+\theta x}$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \frac{1}{1+(\theta x)^2}$